

# Kopplung von BEM und Strahlenverfahren mit Hilfe der Methode der Fundamentallösungen

Sebastian Hampel<sup>1</sup>, Sabine Langer<sup>1</sup>, Adrian P. Cisilino<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Angewandte Mechanik, TU Braunschweig, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: sebastian.hampel@tu-bs.de*

<sup>2</sup> *Welding and Fracture Division, Faculty of Engineering, University of Mar del Plata, Argentinien*

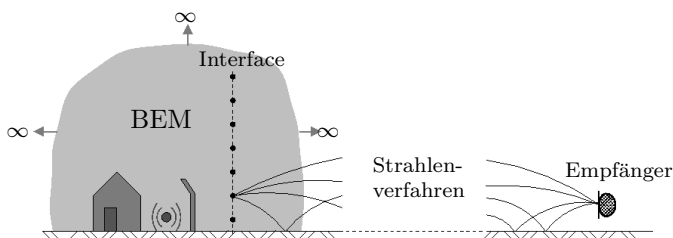
## Problemstellung der Kopplung

Die gängigen Verfahren der numerischen Akustik können unterteilt werden in solche, die auf der Wellentheorie basieren und jene in wellentheoretische Verfahren und solche der geometrischen Akustik. Bei wellenbasierten Verfahren wird die Schallausbreitung als sich ausbreitende Wellen betrachtet und eine Form der Wellengleichung zu Grunde gelegt, z.B. die Helmholtz-Gleichung. Bei der Berechnung werden somit Wellenphänomene wie die Beugung implizit erfasst. Die häufigsten Vertreter dieser Gruppe sind die Finite Elemente Methode (FEM) und die Randelementmethode (BEM). In Verfahren der geometrischen Akustik hingegen wird die Schallausbreitung als Transport von Partikeln beschrieben und der Wellencharakter des Schalls vernachlässigt. Der Ausbreitungsweg eines Schallpartikels wird als Schallstrahl bezeichnet. Die meisten dieser Strahlenverfahren benötigen Punktquellen als Eingangsdaten für die Berechnung.

Für die Berechnung eines Beispiels wie in Abb. 1 wird die Randelementmethode im Nahfeld der Schallquelle eingesetzt, wo komplexe Geometrien und damit Beugung sowie Mehrfachreflexionen auftreten können. Für die Berechnung des Schallfelds an einem Empfänger in größerer Entfernung kommt ein Strahlenverfahren zum Einsatz, das im Gegensatz zur BEM auch Refraktion infolge einer inhomogenen Atmosphäre abbilden kann, deren Ursache ein vertikales Temperatur- oder Windprofil sein kann.



**Abbildung 1:** Betrachtete typische Problemstellung bei der Schallausbreitung im Freien.



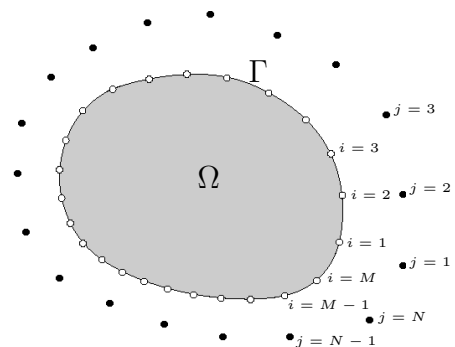
**Abbildung 2:** Idee der hybriden Methode: BEM im Nahfeld - Strahlenverfahren im Fernfeld.

Abb. 2 zeigt das Kopplungsschema für die hybride Methode aus BEM und Strahlenverfahren. Für dieses hybride Modell ist eine Informationsübergabe zwischen den

Teilmodellen notwendig. Dabei müssen aus den Schallfeldgrößen am Übergang Nahfeld-Fernfeld, die aus der BEM-Berechnung bekannt sind, äquivalente Punktquellen als Eingangsdaten für das Strahlenverfahren ermittelt werden. Hierfür wird im Folgenden die Methode der Fundamentallösungen eingesetzt.

## Die Methode der Fundamentallösungen (MFS)

In der Literatur ist die Methode unter verschiedenen Bezeichnungen zu finden, u.a. Ersatzquellenverfahren, Multipol-Strahler-Synthese. Die Idee der MFS ist es, Quellen derart um das betrachtete Gebiet  $\Omega$  zu platzieren, dass durch ihre Überlagerung die auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  vorgegebenen Randbedingungen erfüllt werden (siehe Abb. 3). Mathematisch wird diese Bedingung



**Abbildung 3:** Skizze eines allgemeinen MFS-Problems.

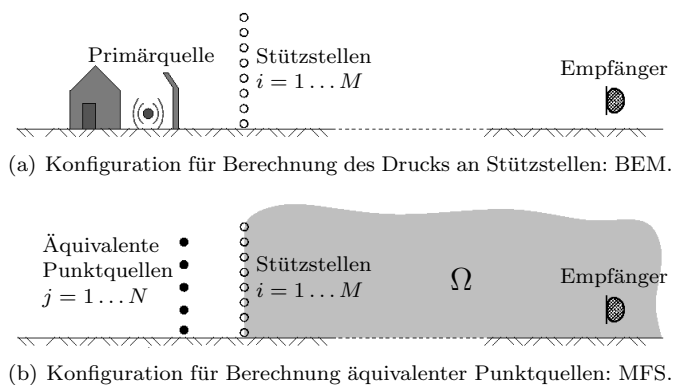
durch eine Summengleichung aufgestellt, in der für einen Randpunkt  $i$  mit bekannter Randbedingung  $p(x_i)$  die Fundamentallösungen  $G_{ij}$  aller  $N$  Quellen  $j$  mit deren (unbekannten) Quellintensitäten  $a_j$  gewichtet und aufaddiert werden:

$$\sum_{j=1}^N G(x_i, \xi_j) \cdot a_j = p(x_i), \quad x_i \in \Omega, \quad \xi_i \in \bar{\Omega}. \quad (1)$$

Stellt man diese Gleichung für  $M$  Stützstellen auf (mit  $M \geq N$ ), so erhält man ein lineares Gleichungssystem, welches mit der Singulärwertzerlegung nach den gesuchten Quellintensitäten  $a_j$  aufgelöst werden kann. Setzt man die dann bekannten Quellintensitäten in Gleichung (1) ein, so kann der Druck an jedem beliebigen Punkt im Gebiet berechnet werden.

## Einsatz der MFS als Kopplungsmethode

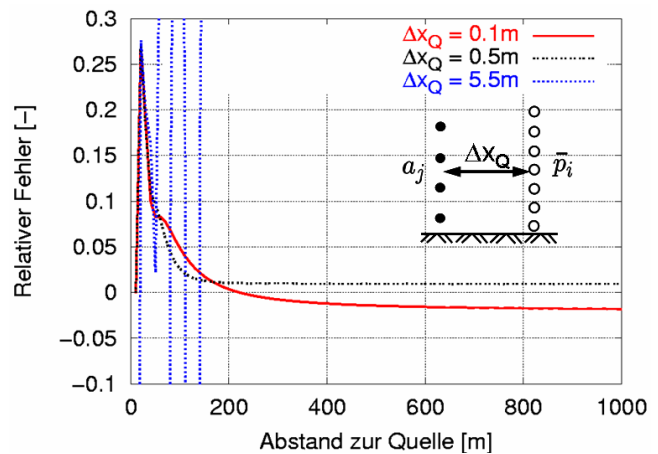
Das für die Kopplung zu lösende Problem aus Abb. 1 weist einige Besonderheiten im Vergleich zum Standard-Problem in Abb. 3 auf. Auf Grund der Geometrie wird für  $G$  die Halbraum-Fundamentallösung eingesetzt. Desweiteren ist das Gebiet  $\Omega$  bzw. dessen Rand  $\Gamma$  nicht explizit definiert, da die Trennung zwischen Nah- und Fernfeld willkürlich ist. Demnach besteht bei der Wahl der Stützstellen (=Interface zwischen Nah- und Fernfeld) ein gewisser Spielraum. Auch die Wahl der Quellpositionen ist flexibel. Für die hier untersuchten Beispiele stellte sich die Anordnung der Stützstellen und Quellpunkte in jeweils vertikalen Linien (siehe Abb. 4) als geeignet heraus. Die Verifikation der Kopplungsmethode wird am Beispiel



**Abbildung 4:** Skizze der Geometrien für die ersten beiden Teilschritte (BEM und MFS) des hybriden Verfahrens.

des homogenen Halbraums durchgeführt, für welchen die Randelementmethode (BEM) in einem Schritt eine Referenzlösung liefert, die quasi exakt ist. Die prozentuale Abweichung der Lösung aus der gekoppelten Berechnung wird als relativer Fehler bezeichnet und an Punkten im Fernfeld ausgewertet. In Abb. 5 ist dieser relative Fehler für drei unterschiedliche Anordnungen der Quellpunkte bzw. Stützstellen dargestellt. Die beiden Kurven mit kleinen Abständen  $\Delta x_Q$  zeigen relative Fehler von ein bis zwei Prozent. Wird der Abstand jedoch wesentlich größer gewählt als die einzelnen Stützstellen untereinander (siehe Kurve  $\Delta x_Q = 5.5 m$ ), so wird der Fehler sehr groß und die Lösung somit unbrauchbar. Dies wird verursacht durch das für diesen Fall sehr schlecht konditionierte Gleichungssystem, dessen Konditionszahl etwa um den Faktor  $10^{10}$  größer ist als für die beiden anderen Konfigurationen. Dies verdeutlicht, dass die Anzahl und Position von Quellen und Stützstellen entscheidend sind für die Güte des Ergebnisses. Für eine erstmals untersuchte Problemstellung ist daher eine solche Fehleranalyse bzw. die Berechnung der Konditionszahl unerlässlich. Die Erfahrung und einige Untersuchungen in der Literatur (z.B. [1]) zeigen, dass das beste Ergebnis oftmals für eine Anzahl  $N$  an Quellen erreicht wird, die deutlich unter der Anzahl  $M$  an Stützstellen liegt.

Bei der Methode der Fundamentallösungen kann statt der Wahl von fixen Quellpositionen auch ein Optimie-



**Abbildung 5:** Relativer Fehler für verschiedene horizontale Abstände  $\Delta x_Q$  zwischen Quellpunkten ( $N = 200$ ) und Stützstellen ( $M = 600$ ).

rungsalgorithmus verwendet werden, der die Positionen automatisch so wählt, dass das Residuum der zu erfüllenden Zwangsbedingungen an den Stützstellen minimiert wird. Der Aufwand eines solchen Algorithmus' steigt jedoch exponentiell mit der Anzahl an Quellen, so dass dies nur für eine sehr geringe Anzahl  $N$  an Quellen möglich ist. Jedoch kann ein Schallfeld, das in größerer Entfernung von einer Primärquelle und komplexer Geometrie erzeugt wird, sehr gut durch nur zwei bis drei äquivalente Punktquellen approximiert werden, die das Nahfeld ersetzen.

Die hybride Methode, mit der Problemstellungen wie in Abb. 1 berechnet werden können, setzt sich dann aus einer BEM-Berechnung zur Ermittlung des Drucks an den Stützstellen, der hier vorgestellten Kopplungsmethode zur Ermittlung äquivalenter Punktquellen und dem Strahlenverfahren zur Berechnung des Schalldrucks am Empfänger zusammen. Im Vergleich zur Kopplung mit Hilfe der Indirekten Randelementmethode [3] ist die Methode der Fundamentallösungen flexibler in der Wahl der Quellpunkte und Stützstellen sowie einfacher zu implementieren, da weder Diskretisierung noch Integration erforderlich sind. Allerdings müssen die Positionen sorgfältiger gewählt werden. Wird dies berücksichtigt, dann erhält man sehr gute Ergebnisse mit dieser Kopplungsmethode.

## Literatur

- [1] A. P. Cisilino, B. Sensale: Optimal placement of the Source Points for Singular Problems in the Method of Fundamental Solutions; in: Advances in Boundary Element Techniques II. Hoggar Press, 2001.
- [2] G. Fairweather, A. Karageorghis, P. A. Martin: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, Engineering Analysis with Boundary Elements 27, S. 759–769, 2003.
- [3] S. Hampel, S. Langer, H. Antes: Kopplung von BEM und Strahlenverfahren zur Berechnung von Schallausbreitung im Freien, Proceedings DAGA'05, 2005.