

## Effiziente Schallfeldberechnung von Blasinstrumenten mithilfe Finiter Elemente

Johannes Baumgart<sup>1</sup>, Steffen Marburg<sup>2</sup>, Roger Grundmann<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut für Luft- und Raumfahrttechnik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland, Email: baumgart@tfd.mw.tu-dresden.de

<sup>2</sup> Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland

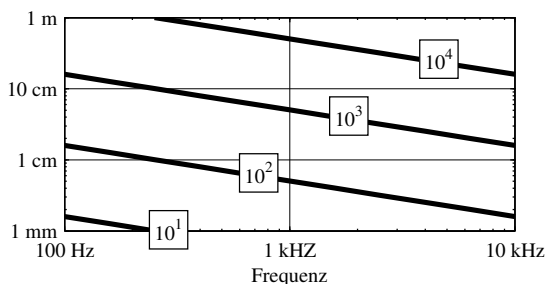
### Einleitung

Blasinstrumente setzen sich aus einem schallerzeugenden Mechanismus und einem akustischen Resonator zusammen. Für den Klang des Instrumentes ist das Zusammenspiel beider entscheidend. Der Resonator ist für die Tonhöhe und darüber hinaus für die Klangfarbe mitverantwortlich. Neben den experimentellen Untersuchungen, bieten sich numerische Simulationen an, um das Verhalten zu simulieren und Modifikationen abzuschätzen. Da zum einen eine genaue Modellierung erfolgen soll und zum anderen eine schnelle Berechnung gewünscht ist, sind effiziente Methoden gefragt. Hier werden die Eigenwertanalyse und der Padé-via-Lanczos Algorithmus vorgestellt.

### Aufgabenstellung

Aus strömungsmechanischer Sicht, lässt sich der akustische Resonator mithilfe von Ähnlichkeitskennzahlen charakterisieren. Damit ist eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen möglich.

Die Machzahl bezogen auf die kontinuierliche Grundströmung ist unter üblichen Spielbedingungen sehr klein. Zum Beispiel ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit am Eintritt des S-Bogens des Fagotts 17,7 m/s für ein  $f$  [5] und damit die Machzahl ca. 0,05. Die Druckschwankungen sind klein gegenüber dem statischen Ruhedruck von ca. 100 kPa. So ist der Blasdruck im Mundraum unter 12 kPa [4] und damit sind nur Druckamplituden dieser Größenordnung im Blasinstrument zu erwarten. Da die Änderungen klein sind kann das Fluid als perfektes Gas betrachtet werden und linearisiert werden. Von Natur aus handelt es sich bei Tönen um periodische Vorgänge und somit ist der eingeschwungene Zustand von hoher Bedeutung. Die viskosen Effekte lassen sich für das mit der Kreisfrequenz  $\omega$  oszillierende Fluid mit dem Womersley Parameter  $\alpha = l\sqrt{\omega/\nu}$  abschätzen, welcher das Verhältnis von einer geometrischen Länge  $l$  zur viskosen Grenzschichtdicke mit der dynamischen Viskosität  $\nu$  darstellt. Es zeigt sich



**Abbildung 1:** Womersley Parameter für die kinematische Viskosität  $\nu = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

für charakteristische Längen  $l$  von über 1 cm, was für Instru-

mente üblich ist, dass die viskosen Effekte vernachlässigt werden können (siehe Abbildung 1).

Unter der Annahme verschwindender Grundströmung, kleine Schwankungen, vernachlässigbare viskose Kräfte, perfektes Gasverhalten und periodischer Vorgang lassen sich die Navier-Stokes Gleichungen als Helmholtzgleichung für den Druck  $p$

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (1)$$

schreiben. Das Fluidverhalten ist mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  charakterisiert.

Neben der Beschreibung im Gebiet ist eine Vorgabe von Größen auf dem Rand notwendig. Die Oberflächengeschwindigkeit des Festkörpers in Normalenrichtung  $\vec{n}$  stellt eine Neumann-Randbedingung auf dem Innenrand dar und sorgt für die Erregung des Fluides. Für die Behandlung der Randbedingung im Unendlichen ist von Belang, wie die Lösung sich dort verhält. Hier ist die Sommerfeldbedingung zu erfüllen, was bedeutet, dass es zum Abklingen kommt und nicht zu Reflektionen aus der Ferne zurück auf den Körper.

Zur Lösung der Randwertaufgabe wird die finite Elemente Methode angewendet. Wegen der beiden unterschiedlichen Randbedingungen ist das Gebiet aufgeteilt. Der innere Teil schließt an den schwingenden Körper an und wird mit finiten Elementen vom Polynomgrad 2 behandelt. Umgeben sind diese mit Astley-Leis-Elementen [2], die die Sommerfeldbedingung erfüllen.

Durch Zusammenfügen steht eine algebraisierte Form der Randwertaufgabe zur Verfügung. Das lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - i\omega \mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (2)$$

verknüpft die an den Knoten am Rand vorgegebene Normalschnelle  $v_n$  im Lastvektor  $\mathbf{f}$  mit dem Druck an den Knoten  $\mathbf{p}$  im gesamten Gebiet. Die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}$  sind reell, frequenzunabhängig und unsymmetrisch.

Die Zustandsraumbeschreibung bietet die Möglichkeit, das System linear für  $\omega$  darzustellen

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} = \mathbf{r} \quad (3)$$

mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ -i\omega \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Hierin sind  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $\mathbf{0}$  die Nullmatrix beziehungsweise der Nullvektor. Eine symmetrische Formulierung ist nicht möglich, da die infiniten Elemente unsymmetrische Matrizen liefern und die Massenmatrix bei diesen singulär

sein kann. Die Dimension des gesamten zu lösenden Gleichungssystem ist  $N$ , die doppelte Anzahl der möglichen Freiheitsgraden.

### Eigenwertanalyse

Die Lösung von (3) erfordert einen hohen Aufwand von Rechenleistung, insbesondere wenn die Lösung für viele verschiedene Frequenzen gesucht wird. Eine Möglichkeit ist die Behandlung als Eigenwertaufgabe [6]. Der Parameter ist hier die Frequenz mit  $N$  möglichen Eigenwerten. Die grossen Eigenwerte sind der feinen Diskretisierung zuzuordnen und die stark gedämpften den Aussenraumschwingungsformen, beide sind bei der Charakterisierung des akustischen Resonators ohne Bedeutung und werden hier vernachlässigt. So kann ein iterativer Eigenwertlöser zum Einsatz kommen, welcher nur kleine Eigenwerte bestimmt, was die Rechenzeit erheblich reduziert. Die dazugehörigen Eigenvektoren geben ein Bild von der Druckverteilung (siehe Abbildung 2).

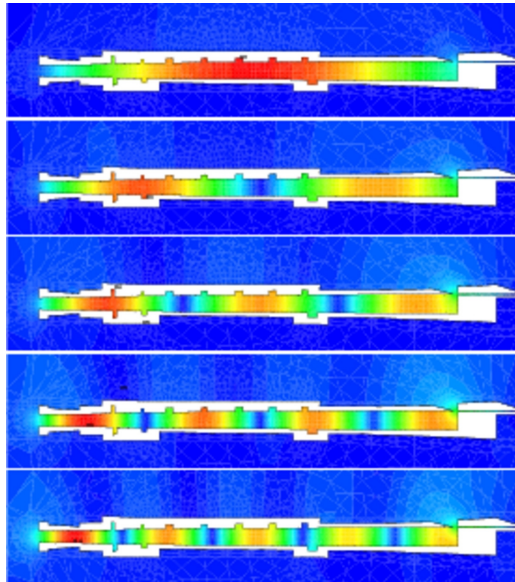


Abbildung 2: Betrag des Druckes der 5 kleinsten, schwach gedämpften Moden einer Altblockflöte mit allen Tonlöchern geschlossen (2D)

### Padé-via-Lanczos

Sind Randbedingungen nur an ausgewählten Punkten vorgegeben und das Ergebnis interessiert nur an bestimmten Punkten, bietet sich der Padé-via-Lanczos Algorithmus an [1, 7].

Die Auswahl der Ein- und Ausgangsgrößen

$$\mathbf{z}_{\text{sel}} = \mathbf{L}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{r}_{\text{sel}} \quad (5)$$

erfolgt mit den Rechteckmatrizen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{R}$ . Durch ausklammern der Steifigkeitsmatrix ist auch folgende Form

$$\mathbf{z}_{\text{sel}} = \mathbf{L}^T (\mathbf{I} - \omega \mathbf{A})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{r}_{\text{sel}} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{r}_{\text{sel}} \quad (6)$$

möglich. Jedoch ist es weiterhin notwendig eine Matrix der Dimension  $N \times N$  für jeden einzelnen Frequenzschritt zu invertieren.

Zur Approximation werden  $n$ -Vektoren des rechten und des linken Krylov-Unterraumes  $\mathbf{W}_n$  und  $\mathbf{V}_n$  verwendet. Mit Hilfe dere es möglich ist die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}_n(\omega) = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{0}_{(n-q) \times q} \end{bmatrix}^T (\mathbf{I} - \omega \mathbf{T}_n)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (7)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \Delta^{-1} \mathbf{W}_n^T \mathbf{A} \mathbf{V}_n, \\ \boldsymbol{\rho} &= \Delta^{-1} \mathbf{W}_n^T \mathbf{R} \text{ und} \\ \boldsymbol{\eta} &= \Delta^{-T} \mathbf{V}_n^T \mathbf{L} \end{aligned} \quad (8)$$

so zu schreiben, dass nur noch eine Matrix der Größe  $n \times n$  in jedem Frequenzschritt invertiert werden muss, wobei  $n \ll N$ .

Die Frequenz abhängige Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}_n(\omega)$  beschreibt das Verhältnis von Druck zu Schallschnelle und ist damit die Impedanz. Durch geeignete Wahl der Rechteckmatrizen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{R}$  ist es auch möglich Bereich zusammenfassen und so die Impedanz insgesamt für die Eintrittsfläche zu bestimmen [3].

### Literatur

- [1] ALIAGA, J. I. ; BOLEY, D. L. ; FREUND, R. W. ; HERNÁNDEZ, V.: A Lanczos-type method for multiple starting vectors. In: *Mathematics of Computation* 69 (2000), S. 1577–1601
- [2] ASTLEY, R. J. ; COYETTE, J.-P. ; CREMERS, L.: Three dimensional wave envelope elements of variable order for acoustical radiation and scattering. Part ii: Formulation in the time domain. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 103 (1998), S. 64–72
- [3] BAUMGART, J. ; MARBURG, S. ; SCHNEIDER, S.: Berechnung der Schalleistung von offenen Strukturen über Frequenzbereiche mit Hilfe finiter und infiniter Elemente sowie Lanczos-Padé-Approximation. In: *DAGA München*, 2005, S. 125–126
- [4] FUKS, L. ; SUNDBERG, J.: Blowing Pressures in Bassoon, Clarinet, Oboe and Saxophone. In: *Acta Acustica united with Acustica* 85 (1997), Nr. 2, S. 267 – 277
- [5] GRUNDMANN, R. ; BAUMGART, J. ; RICHTER, A. ; KRÜGER, H.: Contribution of fluid dynamics to woodwind instruments investigations of timbre and pitch of bassoon bocals. In: *Journal of thermal science : JTS ; international journal of thermal and fluid sciences / Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences* 14 (2005), Nr. 3, S. 264–266
- [6] MARBURG, S. ; DIENEROWITZ, F. ; HORST, T. ; SCHNEIDER, S.: Normal modes in external acoustics. Part II: Eigenvalues and eigenvectors in 2d. In: *Acta Acustica united with Acustica* 92 (2006), Nr. 1, S. 97–111
- [7] WAGNER, M. M. ; PINSKY, P. M. ; MALHOTRA, M.: Application of Padé via Lanczos approximations for efficient multifrequency solution of Helmholtz problems. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 113 (2003), Nr. 1, S. 313–319