

Ein 3D-Modell zur Berechnung der Ausbreitung von Erschütterungen in Bodenschichten

H. Waubke, W. Kreuzer, P. Balazs

Österreichische Akademie der Wissenschaften, Institut für Schallforschung, Reichsratsstrasse 17, 1010 Wien

Einleitung

Modelle, mit deren Hilfe die Ausbreitung von Erschütterungen in Böden untersucht werden können, werden z.B. durch den vermehrten Aus- und Neubau von (Hochleistungs-)Bahnstrecken in der unmittelbaren Nähe von Wohngebieten immer wichtiger. Da aber Materialparameter für Bodenschichten schwer bestimmt werden können oder Messungen mit großen Unsicherheiten behaftet sind, wurde ein Modell entwickelt, mit dem es möglich ist, stochastische Materialparameter zu verwenden, und mit dem die Ausbreitung von Erschütterungen in Böden, die durch bewegte Lasten ausgelöst werden, simuliert werden können.

Geometrischer Aufbau

Im Modell ist der Boden aus verschiedenen horizontalen Schichten aufgebaut, neben deterministischen Schichten, d.h. Schichten mit deterministischen Materialparametern, gibt es auch die Möglichkeit, stochastische Schichten, die mit Hilfe von finiten Elementen modelliert werden, zu verwenden. Zusätzlich kann als erste Schicht eine Fluid- und als letzte Schicht eine Halbraumschicht eingebaut werden (als kleines Beispiel siehe Abbildung 1).

Alle unsere Betrachtungen beschränken sich in x, y -Richtung auf das Intervall $[-a_x, a_x] \times [-a_y, a_y]$, außerhalb dieses Intervalls werden die Verformungen der einzelnen Schichten periodisch fortgesetzt.

Mathematischer Hintergrund

Um die Dynamik des Systems beschreiben zu können, verwenden wir eine schwache Formulierung $\delta L = 0$ mit:

$$L = \int_t \int_x \int_y \int_z \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} G(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + \frac{4\nu}{1-2\nu} G(u_x v_y + v_y w_z + u_x w_z) + G((u_y + v_x)^2 + (v_z + w_y)^2 + (w_x + u_z)^2) - \rho(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) dz - 2b_{\text{Ext}} w|_{z=0} dy dx dt. \quad (1)$$

Das Material der Bodenschicht ist durch die Querdehnungszahl ν , die Dichte ρ und den Schubmodul G , der unter anderem von der Zufallsvariablen θ abhängt, gegeben. Gleichung (1) beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Verformungsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ und der Last b_{Ext} , die in z -Richtung wirkt und an der obersten Schicht ($z = 0$) ansetzt.

Mit Hilfe der folgenden mathematischen Werkzeuge kann Gl. (1) in ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{Ext}}$ transformiert werden:

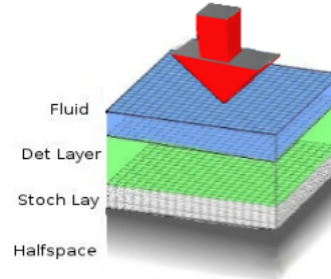


Abbildung 1: Geometrische Situation

- Der Schubmodell $G(x, y, z, \theta)$ wird mittels Karhunen Loeve Zerlegung als Linearkombination von Zufallsvariablen $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij})$, von denen wir annehmen, dass sie normalverteilt sind, dargestellt:

$$G(x, y, z, \theta) = G_0(z) + G_s \sum_i \sum_j \sqrt{\lambda_i \mu_j} f_i(x) g_j(y) \xi_{ij}. \quad (2)$$

Die (λ_i, f_i) und (μ_j, g_j) sind Eigenpaare der Fredholmschen Integralgleichung der 2. Art mit der Kovarianzfunktion $C(x_1, x_2, y_1, y_2) := C_1(x_1, x_2)C_2(y_1, y_2)$ als Kern (siehe auch [1, 2]).

- Mittels Chaospolynom Zerlegung wird der Verformungsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ als Linearkombinationen von Hermite Polynomen dargestellt (siehe auch [1, 3]):

$$\mathbf{u}(x, y, z, t, \theta) = \sum_i \mathbf{u}^{[i]}(x, y, z, t) \Gamma_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (3)$$

- Die einzelnen $\mathbf{u}^{[i]}(x, y, z, t)$ werden mittels einer finiten Element Basis $h_j(z)$ (B-splines der 2. Ordnung) in

$$\mathbf{u}^{[i]}(x, y, z, t) = \sum_j \mathbf{u}_j^{[i]}(x, y, t) h_j(z) \quad (4)$$

zerlegt.

- Das System wird mittels Fourier Transformation vom Orts-Zeit Raum in den Wellenzahl-Frequenzraum transformiert: $(x, y, t) \rightarrow (k, \ell, \omega)$
- Nach der Bildung von Erwartungswerten und Diskretisierung des (k, ℓ) -Bereichs wird nach den Unbekannten $\hat{\mathbf{u}}_j^{[i]}(\tilde{k}, \tilde{\ell})$ variiert, wobei $(\tilde{k}, \tilde{\ell})$ nun Punkte eines Gitters im \mathbb{R}^2 sind. Normalerweise müsste auch für die Frequenzen ω eine Diskretisierung durchgeführt werden, aber wie wir sehen werden, gibt es

für jedes \tilde{k} nur zwei verschiedene ω -Werte, für die das System eine nicht triviale Lösung besitzt. Somit ergibt sich aus der Diskretisierung für k automatisch eine dazugehörige Diskretisierung für ω .

Das Gleichungssystem, das durch obigen Prozedur entsteht, ist im Allgemeinen sehr hochdimensional und die dazugehörige Matrix voll besetzt. Durch ein spezielles Iterationsschema ist es jedoch möglich das System für jede einzelne Wellenzahl und jedes einzelne Chaospolynom zu entkoppeln, womit eine effiziente Lösung des Gleichungssystems ermöglicht wird. Mehr Information zu dieser Iteration kann in [2] gefunden werden.

Bewegte Lasten

Es wird angenommen, dass sich die externe Last mit einer konstanten Geschwindigkeit v entlang der x-Achse bewegt, mit einer Frequenz f_0 schwingt, und die Form einer Punktlast oder einer Rechtecklast besitzt. Im Fall einer Punktlast wird die externe Kraft mit Stärke P mittels

$$b_{\text{Ext}} = P\delta(x - vt)\delta(y) \cos(2\pi f_0 t) \quad (5)$$

beschrieben, für die Rechtecklast mit Länge b_1 und Breite b_2 verwenden wir

$$b_{\text{Ext}} = \frac{P}{b_1 b_2} \Pi\left(\frac{x - vt}{b_1}\right) \Pi\left(\frac{y}{b_2}\right) \cos(2\pi f_0 t). \quad (6)$$

$\delta(x)$ bezeichnet das Dirac Deltafunktional, $\Pi(x)$ ist die Rechtecksfunktion definiert durch

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (7)$$

Mittels Fourier-Transformation erhalten wir aus Gleichung (5)

$$\hat{b}_{\text{Ext}} = \frac{P}{8a_x a_y} (\delta(\omega + \frac{kv}{2a_x} + f_0) + \delta(\omega + \frac{kv}{2a_x} - f_0)). \quad (8)$$

Die Fourier-Transformation von Gl. (6) unterscheidet sich von Gleichung (8) nur durch den Faktor

$$\text{sinc}\left(\frac{b_1 \pi k}{2a_x}\right) \text{sinc}\left(\frac{b_2 \pi \ell}{2a_y}\right), \quad (9)$$

wir werden daher alle weiteren Betrachtungen auf den Fall einer Punktlast reduzieren.

Kombinieren wir die Gleichungen (1) und (8), erhalten wir unter Vernachlässigung "konstanter" Faktoren

$$\sum_{\tilde{k}} \sum_{\tilde{\ell}} (\hat{w}(-\tilde{k}, -\tilde{\ell}, \frac{\tilde{k}v}{2a_x} - f_0) + \hat{w}(-\tilde{k}, -\tilde{\ell}, \frac{\tilde{k}v}{2a_x} + f_0)). \quad (10)$$

Das bedeutet aber, dass es nach der Variation nur für bestimmte Kombinationen von \tilde{k} und $\tilde{\omega}$ einen von 0 verschiedenen Belastungsvektor gibt, um präziser zu sein, zu jedem \tilde{k} gibt es zwei verschiedene ω -Werte, sodass auf der rechte Seite des entkoppelten linearen Gleichungssystems ein von 0 verschiedener Vektor existiert. Diese Tatsache bewirkt eine weitere Reduktion der Komplexität des Systems.

Schicht	G_0	G_s	ρ	ν	d
Fluid	2e9+2e6i		1000		1
Stoch.	2e8+2e7i	1e6+1e5i	1800	0.3	0.2×40
Halbr.	2e8+1e7i		1800	0.3	

Tabelle 1: Materialkennwerte für das Testbeispiel: G_0 bezeichnet den Mittelwert des Schubmoduls in N/m^2 , ρ die Dichte in kg/m^3 , ν die Poissonzahl und d die Dicke der Schicht in m.

Beispiel

Als Testbeispiel wählen wir ein Modell mit einer Fluidschicht, einer stochastischen Schicht, die aus 40 finiten Elementen besteht und einer abschließenden Halbraumschicht, um Reflektionen zu vermeiden. Die Last bewegt sich entlang der x-Achse mit einer Geschwindigkeit von 60 m/s und schwingt mit einer Frequenz von $f_0 = 100\text{Hz}$. Abb. 2 zeigt die Verformung an der Oberseite der stochastischen Schicht nach 21 Zeitschritten.

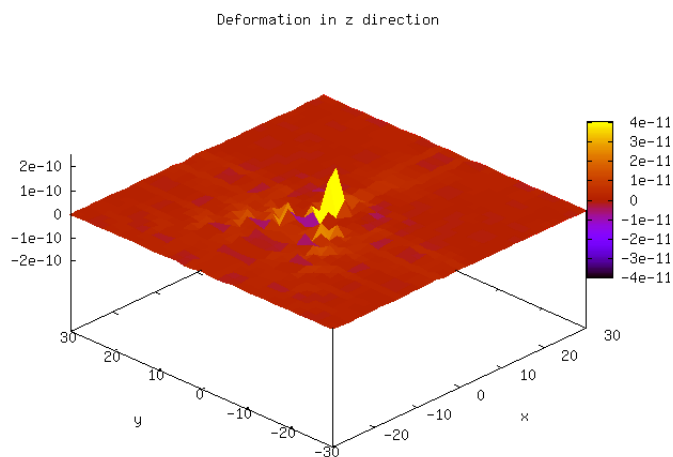


Abbildung 2: Verformung in z-Richtung an der Oberseite der stochastischen Schicht.

Danksagung

Dieses Projekt wurde durch den österreichischen Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung unterstützt (FWF Projekt-Nummer:P16224-N07)

Literatur

[1] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona, 1991.

[2] W. Kreuzer, H. Waubke, and P. Balazs. A 3D-stochastic model for simulating the propagation of waves in soil layers. In *Proceedings of the 13th International Congress on Sound and Vibration, ICSV13*, 2006. To appear.

[3] N. Wiener. The homogeneous chaos. *Am J Math*, 60:897–936, 1938. John Hopkins Press, Baltimore.