

# Effiziente Implementierung eines stochastischen Modells zur Berechnung von Erschütterungen in Böden und Fluiden

W. Kreuzer, H. Waubke, P. Balazs

Österreichische Akademie der Wissenschaften, Institut für Schallforschung, Reichsratsstrasse 17, 1010 Wien

## Einleitung

Um die Ausbreitung von Erschütterungen in Böden zu simulieren, erscheint es sinnvoll, stochastische Modelle zu verwenden, da die Bestimmung von Materialparametern meist nur mit sehr großen Unsicherheiten möglich ist. Solche stochastischen Ansätze haben aber den großen Nachteil, dass sie sehr rechenintensiv sind. Um dennoch solche Systeme in annehmbarer Zeit numerisch lösen zu können, wird eine Iterationsmethode verwendet, mit der der Rechenaufwand erheblich reduziert werden kann.

## Das Modell

Wir werden auf den Aufbau und die Ideen hinter dem Modell nur sehr überblicksmäßig eingehen können, für weitergehende Literatur siehe z.B. [1, 2, 3]. Das bereits oben erwähnte Zufallselement wird über einen Schubmodul eingebaut, der unter anderem auch von einer Zufallsvariablen  $\theta$  abhängt, und der mit Hilfe der Karhunen-Loeve Zerlegung mittels einer Basis  $\xi_i(\theta)$  aus normalverteilten Variablen dargestellt wird:

$$G(x, y, z, \theta) = G_0(z) + G_s \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} g_i(x, y) \xi_i(\theta). \quad (1)$$

Die  $\lambda_i$  und  $g_i(x, y)$  ergeben sich als Lösung der Fredholm'schen Integralgleichung der 2. Art, deren Kern durch die Kovarianzmatrix von  $G$  gebildet wird (siehe z.B. [1]).

Um den stochastischen Verformungsvektor  $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$  ( $u$  beschreibt die Verformung in  $x$ -Richtung,  $v$  die in  $y$ -Richtung und  $w$  die Verformung in  $z$ -Richtung) numerisch behandeln zu können, wird er in einer Basis aus Hermite Polynomen  $\Gamma_j$  entwickelt (siehe auch [4]):

$$\mathbf{u}(x, y, z, \theta) = \sum_j \mathbf{u}_j(x, y, z) \Gamma_j(\boldsymbol{\xi}). \quad (2)$$

Hermite Polynome haben die spezielle Eigenschaft, daß sie der Orthogonalrelation

$$\mathbb{E}(\Gamma_i \Gamma_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i(\boldsymbol{\xi}) \Gamma_j(\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{2}} d\boldsymbol{\xi} = 0, \quad \forall i \neq j \quad (3)$$

genügen.

Mit Hilfe dieser Ansätze in Kombination mit einer Fourier Transformation, der Verwendung von finiten Elementen und der abschließenden Bildung des Erwartungswerts wird die partielle Differentialgleichung, welche die Dynamik des Systems beschreibt, in ein lineares Gleichungssystem  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{Ext}}$  umgewandelt.

## Lösung des Gleichungssystems

Die Matrix, die dieses System beschreibt, ist jedoch sehr hochdimensional und voll besetzt, womit eine direkte Lösung (z.B. mittels LU-Zerlegung und Rücksubstitution) nicht effizient wäre. Als alternativen Lösungsweg wählen wir einen Iterationsansatz: Die Matrix  $\mathbf{K}$  wird in einen deterministischen Teil  $\mathbf{K}_d$ , in dem nur Komponenten eingehen, die mit  $G_0(z)$  multipliziert werden, und einen stochastischen Teil  $\mathbf{K}_s$ , der alle Komponenten, die mit dem zweiten Teil der rechten Seite von Gl. (1) multipliziert werden, enthält. Der Verformungsvektor wird nun mittels

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_d \mathbf{u}_0 &= \mathbf{f}_{\text{Ext}} \\ \mathbf{K}_d \mathbf{u}_n &= \mathbf{f}_{\text{Ext}} - \mathbf{K}_s \mathbf{u}_{n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

bestimmt. Diese Iteration hat den Vorteil, dass  $\mathbf{K}_d$  im Gegensatz zu  $\mathbf{K}_s$  eine spezielle Blockgestalt besitzt, wodurch es möglich ist,  $\mathbf{K}_d$  für jede einzelne Wellenzahl und jedes einzelne Hermite Polynom zu entkoppeln.

Der Grund für diese einfache Gestalt liegt einerseits darin, dass im "deterministischen Teil" der Differentialgleichung jeweils nur Produkte von zwei Funktionen vorkommen, die bzgl.  $\mathbf{x} := (x, y)$  Fourier transformiert werden müssen. Durch eine schwache Formulierung der Differentialgleichung ist es möglich, anstelle der allgemein üblichen Faltung Plancherel's Theorem zu verwenden:

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_0 f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} G_0 \hat{f}_1(\mathbf{k}) \hat{f}_2(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (5)$$

$\hat{f}_i(\mathbf{k})$  bezeichnet hier die Fourier-Transformierte der beliebig gewählten Funktion  $f_i(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{k} := (k, \ell)$ . Im "stochastischen" Teil hingegen wird durch die zusätzlichen Funktionen  $g_i(\mathbf{x})$  aus Gleichung (1) eine Faltung unvermeidbar:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} g_i(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{g}_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \hat{f}_1(\mathbf{k}') \hat{f}_2(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}' d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Im Vergleich zum deterministischen Teil (5), in dem nur Funktionen zur jeweils gleichen Wellenzahl  $\mathbf{k}$  gekoppelt sind, gibt es im stochastischen Teil (6) durch das zusätzliche Integral eine volle Kopplung zwischen Verformungen zu den verschiedenen Wellenzahlen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}'$ .

Im Zuge der Modellbildung ist es auch nötig den Erwartungswert des Verformungsvektors  $\mathbf{u}$  zu bilden. Im deterministischen Teil kann die Orthogonalität der Hermite Polynome ausgenutzt werden, da in diesem Teil jeweils nur Produkte aus zwei von  $\xi$  abhängigen Funktionen vorkommen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(fg) &= \mathbb{E}\left(\sum_i f_i \Gamma_i \sum_j g_j \Gamma_j\right) \\ &= \sum_i \sum_j f_i g_j \mathbb{E}(\Gamma_i \Gamma_j) = \sum_i f_i g_i \mathbb{E}(\Gamma_i^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Im stochastischen Teil hingegen gibt es zusätzliche Funktionen  $\xi_i(\theta)$  aus Gl. (1), die bei der Bildung des Erwartungswerts berücksichtigt werden müssen. Diese gemischten Erwartungswerte  $\mathbb{E}(\xi_i \Gamma_{j_1} \Gamma_{j_2})$  sind jedoch im Allgemeinen ungleich 0.

Die Geschwindigkeit der Konvergenz hängt stark vom Verhältnis zwischen dem Mittelwert  $G_0$  des Schubmoduls und dessen Varianzfaktor  $G_s$  ab (vgl. Gleichung (1)). Heuristisch kann das aus der Umformung von Gl. (4) nach  $\mathbf{u}_n$  gesehen werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= -\mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{K}_s \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{f}_{\text{Ext}} \\ &= -\mathbf{S} \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_0 = -\mathbf{S}(-\mathbf{S} \mathbf{u}_{n-2} + \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = \\ &= \mathbf{S}^2 \mathbf{u}_{n-2} - \mathbf{S} \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \dots \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathbf{S}^i \mathbf{u}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei  $\mathbf{S} := \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{K}_s$ . Es ist nun klar, dass die Konvergenz der Iteration gesichert ist, wenn der Spektralradius von  $\mathbf{S}$ , der stark vom Verhältnis  $G_s/G_0$  beeinflusst wird, kleiner als eins ist. Zusätzlich bedingt ein kleineres Verhältnis eine schnellere Konvergenz.

Als Maß für die Konvergenz(geschwindigkeit) benutzen wir die Größe des Residuums  $\mathbf{r}_n = (\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_s) \mathbf{u}_n - \mathbf{f}_{\text{Ext}}$ , das sich relativ einfach aus  $\mathbf{r}_n = \mathbf{K}_s (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1})$  berechnen läßt, da  $\mathbf{K}_s \mathbf{u}_{n-1}$  aus der vorhergehende Iteration bekannt ist, und  $\mathbf{K}_s \mathbf{u}_n$  für die nächste Iteration berechnet werden muß.

Für einen Testfall ist das Konvergenzverhalten auch in Tabelle 2 illustriert. Wir verwenden eine Modellierung mit einer Fluidschicht, 20 stochastischen finiten Elementen und einer abschließenden Halbraumschicht, und untersuchen die Konvergenz der Iteration für verschiedene Quotienten  $G_s/G_0$ . Die wichtigsten Materialkennwerte für alle Schichten sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Tabelle 2 listet den maximalen Wert des Residuums  $\mathbf{r}_n$  für verschiedene Verhältnisse von  $G_0$  und  $G_s$  auf. Für Bsp. 1 wurde  $G_s/G_0 = 1/200$  gesetzt, für Bsp. 2 und 3 jeweils  $1/20$  und  $1/2$ . In allen 3 Fällen wurde ein  $x, y$ -Gitter von  $17 \times 17$  Punkten gewählt. Die Frequenz der externen Kraft wurde mit 100 Hz festgelegt.

Besonders auffällig ist die Tatsache, daß sich die Werte für die unterschiedlichen Verhältnisse nur im Exponenten (plus Rechenungenauigkeit im Rundungsfehlerbereich) unterscheiden, was auch genau die Heuristik

Schicht	$G_0$	$\rho$	$\nu$	$d$
Fluid	2.25E9+2.25E6i	1000		1
Stoch.	2.00E8+2.00E7i	1800	0.3	20×0.2
Halbr.	2.00E8+1.00E7i	1800	0.3	

**Tabelle 1:** Materialkennwerte zu den Testbeispielen:  $G_0$  bezeichnet den Mittelwert des Schubmoduls in  $\text{N/m}^2$ ,  $\rho$  die Dichte in  $\text{kg/m}^3$ ,  $\nu$  die Querdehnzahl und  $d$  die Dicke der Schicht in m.

Iter	Bsp. 1	Bsp. 2	Bsp. 3
1	8.263E-08	8.263E-07	8.263E-06
2	2.842E-11	2.842E-09	2.842E-07
3	1.679E-14	1.679E-11	1.679E-08
4	9.848E-18	9.848E-14	9.848E-10
5	7.127E-21	7.027E-16	7.027E-11
6	3.900E-24	3.860E-18	3.860E-12
7	1.326E-23	2.580E-20	2.449E-13

**Tabelle 2:** Residuum der Iteration für verschiedene Verhältnisse  $G_s/G_0$  (siehe Gleichung (1)). Bsp. 1:  $G_s/G_0 = 1/200$ , Bsp. 2:  $G_s/G_0 = 1/20$ , Bsp. 3:  $G_s/G_0 = 1/2$ .

von oben widerspiegelt. Es wurden noch einige kleinere Experimente mit verschieden grossen Wellenzahlbereich durchgeführt, größere Abweichungen zu obigen Experiment gab es hierbei jedoch nicht.

## Danksagung

Dieses Projekt wurde durch den österreichischen Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung unterstützt (FWF Projekt-Nummer: P16224-N07)

## Literatur

- [1] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona, 1991.
- [2] W. Kreuzer, H. Waubke, and P. Balazs. A 3D-stochastic model for simulating the propagation of waves in soil layers. In *Proceedings of the 13th International Congress on Sound and Vibration, ICSV13*, 2006. To appear.
- [3] H. Waubke, P. Balazs, B. Jilge, and W. Kreuzer. Waves in random layers with arbitrary covariance functions. In *Proceedings of the 12th International Congress on Sound and Vibration*, Lisbon, 2005.
- [4] N. Wiener. The homogeneous chaos. *Am J Math*, 60:897–936, 1938. John Hopkins Press, Baltimore.