

Entwurf nichtrekursiver Fractional-Delay-Filter mit breitbandig ebener Gruppenlaufzeit

Martin Eichler und Arild Lacroix

J. W. Goethe Universität, Institut für Angewandte Physik, 60438 Frankfurt am Main

Email: {Eichler, Lacroix}@iap.uni-frankfurt.de

Einleitung

Fractional-Delay-Filter (FD-Filter) erlauben die zeitliche Verschiebung eines Signals um Bruchteile eines Abtastwertes. In diesem Beitrag wird ein Ansatz zum Design von FIR-FD-Filtern vorgestellt, der als Spezialfall den aus der Literatur bekannten Lagrange-Interpolator enthält. Ein zusätzlicher Parameter erlaubt dabei die Optimierung und signifikante Erhöhung der Bandbreite. Die erreichten Bandbreiten übertreffen diejenigen entsprechender Allpass-FD-Filter gleicher Ordnung, womit eine Halbierung des Rechenaufwandes möglich wird.

Zielsetzung

Wir betrachten ein lineares, digitales Filter mit der (idealen) Übertragungsfunktion

$$H_{ideal}(z) = z^{-\alpha} \quad (\text{mit } \alpha \in \mathbb{R}^+), \quad (1)$$

dessen Gruppenlaufzeit τ sich aufgrund $z = e^{i\omega}$ zu

$$\tau = \frac{d}{d\omega} (-\angle H_{ideal}(e^{i\omega})) = \frac{d}{d\omega}(\alpha\omega) = \alpha \quad (2)$$

berechnet. H_{ideal} ist für ganzzahlige $\alpha = n$ direkt in der Form z^{-n} realisierbar; im Falle nichtganzzahliger α muß H_{ideal} approximiert werden. Die wichtigste Konsequenz hieraus ist, daß die Gruppenlaufzeit der approximierenden Filter nicht über den vollen Frequenzbereich konstant ist. Es existiert eine Vielzahl von Methoden, FIR- oder IIR-Filter zu entwerfen, die (1) für ein gegebenes α approximieren [1]. Hier untersuchen wir einen Ansatz, der von der Reihenentwicklung von z^α ausgeht.

Taylorreihen-Entwicklung von z^α

Wir entwickeln z^α um z_0^{-1} in eine Taylorreihe der Form

$$T(z) = \sum_{k=0}^N a_k (z - z_0^{-1})^k = \sum_{k=0}^N b_k z^k \stackrel{!}{\approx} z^\alpha. \quad (3)$$

Die Koeffizienten $\{a_k\}$ und $\{b_k\}$ ergeben sich für $k = 0, 1, 2, \dots, N$ gemäß $a_k = 1/k! \cdot d^k z^\alpha / dz^k|_{z=z_0^{-1}}$ und dem binomischen Lehrsatz direkt zu

$$a_k = z_0^{-(\alpha-k)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \prod_{m=0}^{k-1} (\alpha - m) \quad (4)$$

und

$$b_k = \sum_{m=k}^N a_m \binom{m}{k} (-z_0)^{k-m}. \quad (5)$$

Das durch die $\{b_k\}$ gegebene Polynom $T(z)$ in (3) entspricht einem akausalen Filter. Ersetzt man im Argument aber z durch z^{-1} , so entsteht ein kausales Filter $H(z) = T(z^{-1})$, das eine Approximation von $z^{-\alpha}$ darstellt:

$$H(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \approx z^{-\alpha}. \quad (6)$$

Der Approximationsfehler $H(z) - H_{ideal}(z)$ wird für auf dem Einheitskreis liegende z lediglich komplex konjugiert. Für $z = z_0$ verschwindet er ganz. Durch vollständige Induktion läßt sich nun zeigen, daß für die $\{b_k\}$ nach (4) und (5) gilt:

$$b_k = z_0^{k-\alpha} \cdot \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^N \frac{\alpha - n}{k - n}. \quad (7)$$

Im Fall $z_0 = 1$ entfällt der Vorfaktor in (7) und die $\{b_k\}$ gehen direkt in die Koeffizienten des Lagrange-Interpolators über. Dieser wird in der Literatur durch zu-Null-Setzen der ersten N Ableitungen des Fehlers $E(z) = H(z) - H_{ideal}(z)$ nach der normierten Frequenz ω im Punkt $\omega = \omega_0$ konstruiert, wobei $\omega_0 = 0$ gewählt wird ([1], S. 40f.). Formuliert man diesen Ansatz für ein allgemeines $\omega_0 \neq 0$, so nehmen die Koeffizienten $\{b_k\}$ folgende Form an:

$$b_k = e^{i\omega_0(k-\alpha)} \cdot \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^N \frac{\alpha - n}{k - n}. \quad (8)$$

Durch die Beziehung $z_0 = e^{i\omega_0}$ können (7) und (8) ineinander überführt werden. Der Fall $\omega_0 = 0$ entspricht damit der Taylor-Entwicklung von z^α um den Punkt $z_0 = 1$, der Fall $\omega_0 \neq 0$ einer Entwicklung um den Punkt $z_0^{-1} = e^{-i\omega_0}$. Allerdings ist das resultierende Filter (6) nur dann reellwertig ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$), wenn z_0 reell und positiv ist. Diese Bedingung ist für reelle ω_0 nur im Fall $\omega_0 = 0$ erfüllt; alle anderen Werte reeller, positiver z_0 entsprechen wegen $z_0 = e^{i\omega_0}$ einem rein imaginären ω_0 . Durch Variation von z_0 auf der reellen Achse ist es nun möglich, die Bandbreite des jeweiligen FD-Filters zu erhöhen.

Bandbreiten-Maximierung

Wir definieren die instantane Bandbreite eines FD-Filters als diejenige Frequenz, bis zu der die Gruppenlaufzeit τ innerhalb eines Fehlerintervalls $[\alpha - \Delta\tau, \alpha + \Delta\tau]$ um die vorgegebene Laufzeit α liegt (alternativ wäre auch eine Definition über die Phasenlaufzeit möglich). Als

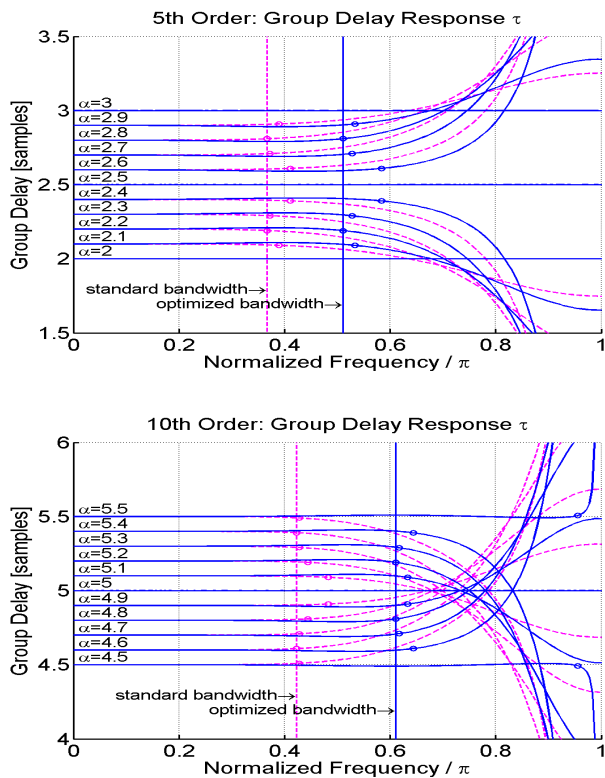


Abbildung 1: FIR-FD-Filter 5. (oben) und 10. Ordnung (unten), Gruppenlaufzeit. Gestrichnet: $z_0 = 1$; durchgezogen: z_0 optimiert für $\Delta\tau = 0.01$. Kreise: Instantane Bandbreiten.

Bandbreite definieren wir das Minimum der instantanen Bandbreiten für alle $\alpha \in [(N - 1)/2|(N + 1)/2]$, also diejenige Frequenz, bis zu der das Filter den Fehler $\Delta\tau$ für alle α einhält. Unter Vorgabe von $\Delta\tau$ kann nun z_0 so eingestellt werden, daß die Gruppenlaufzeit-Bandbreite maximal wird. Abb. 1 zeigt zwei Beispiele mit $\Delta\tau = 0.01$; Abb. 2 zeigt die zugehörigen Verläufe von $z_0(\alpha; N, \Delta\tau)$, zusätzlich auch diejenigen für $\Delta\tau = 0.05$. Der jeweils optimale Wert von z_0 ist dabei von der Filterordnung N , der Fehlerschranke $\Delta\tau$ und der Soll-Laufzeit α abhängig. Im Fall ganzzahliger α ist z_0 beliebig und wurde daher hier zu 1 gesetzt. Auffällig ist der kontinuierliche Verlauf bei ungeraden, und der diskontinuierliche bei geraden Ordnungen. Weiter fällt eine Symmetrie der Form $z_{0,opt}(\alpha) = 1/z_{0,opt}(N - \alpha)$ auf (Punktsymmetrie von $\ln z_{0,opt}$ bezüglich $N/2$), die durch eine entsprechende Symmetrie der Koeffizienten (7) erklärbar ist. Es läßt sich nämlich zeigen, daß gilt ($k = 0, 1, 2, \dots, N$):

$$b_k(z_0, \alpha) = b_{N-k}(z_0^{-1}, N - \alpha). \quad (9)$$

Hieraus folgen direkt die Symmetrie der Gruppenlaufzeit-Kurven bezüglich der Kurve für $\alpha = N/2$ (siehe Abb. 1) sowie die genannte Symmetrie von $z_{0,opt}$.

In Abb. 3 sind die erreichten Bandbreiten denen des bekannten Filters ($z_0 = 1$) gegenübergestellt. Zusätzlich sind die Bandbreiten dargestellt, die sich für ein Allpass-(IIR-)Filter nach dem Maximally-Flat-Ansatz ([1], [2]) ergeben. Man sieht, daß die Bandbreiten der optimierten Filter nicht nur signifikant größer als die der bekannten Filter sind, sondern auch (bei allen geraden Ordnungen > 5 und allen ungeraden Ordnungen)

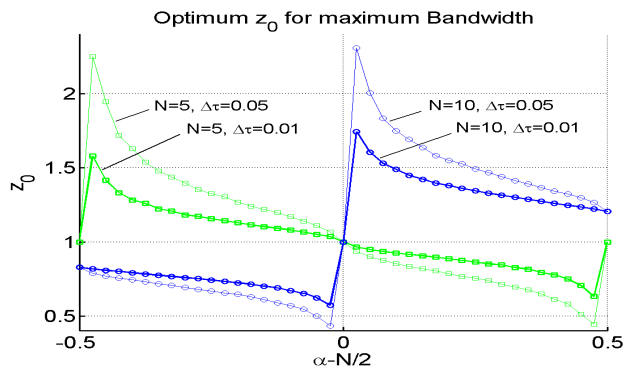


Abbildung 2: Optimale z_0 -Werte für die Filter 5. (Quadrate) und 10. Ordnung (Kreise), abhängig von α und $\Delta\tau$.

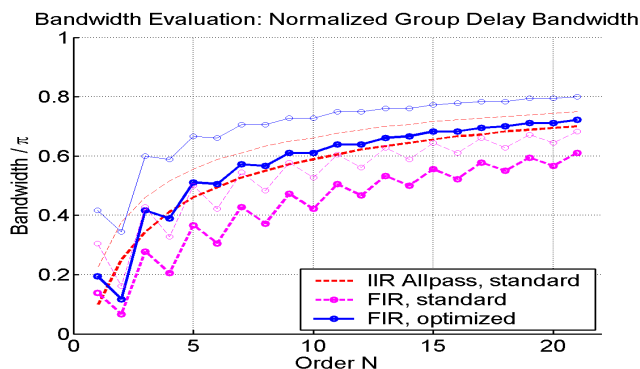


Abbildung 3: FIR-FD-Filter nach (6): Bandbreiten der Filterordnungen 1 bis 21. Gestrichnet mit Kreisen: $z_0 = 1$; durchgezogen mit Kreisen: z_0 optimiert; gestrichelt: Allpass-Filter nach [1, 2]. Dicke Linien: $\Delta\tau = 0.01$; dünne Linien: $\Delta\tau = 0.05$.

Filter übertreffen. Weitere Betrachtungen zeigen, daß der Abfall im Betragsgang vom Idealwert 1 innerhalb der Bandbreite für $\Delta\tau = 0.01$ weniger als 0.51dB (für $N \geq 3$) und für $\Delta\tau = 0.05$ weniger als 2.2dB (für $N \geq 3$) beträgt.

Zusammenfassung

Es wurde eine allgemeine Form der Taylorreihen-Entwicklung des idealen Interpolators untersucht und gezeigt, daß durch Variation des Entwicklungspunktes z_0^{-1} auf der reellen Achse eine starke Erhöhung der Bandbreite möglich ist. Da die so optimierten FIR-FD-Filter nur den halben Rechenaufwand erfordern wie die Allpass-Filter gleicher Ordnung, können sie diesen vorgezogen werden, sofern in der Anwendung kleine Betragsgangs-Abweichungen tolerierbar sind.

Literatur

- [1] T. I. Laakso, V. Välimäki, M. Karjalainen and U. K. Laine, "Splitting the Unit Delay", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 1, pp. 30–60, Jan. 1996.
- [2] J.-P. Thiran, "Recursive Digital Filters with Maximally Flat Group Delay", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-18, no. 6, pp. 659–664, Nov. 1971.