

DG-Methoden für aeroakustische Applikationen

Andreas Richter, Jörg Stiller, Roger Grundmann

Institut für Luft- und Raumfahrttechnik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden

Email: Andreas.Richter4@tu-dresden.de

Einleitung

Die Schallausbreitung in durchströmten Geometrien wie z.B. Rohrleitungen und Schalldämpfern, aber auch Holzblasinstrumenten ist oftmals geprägt durch die unterschiedlichen Größenordnungen der Grundströmung und des überlagerten akustischen Schwankungsanteiles. Spektralelementmethoden (SEM) als Methoden höherer Ordnung bilden ein effizientes Werkzeug, die zugrundeliegenden Differentialgleichungen mit der hierfür erforderlichen Genauigkeit zu lösen. Diskontinuierliche Galerkin-Methoden ermöglichen eine effiziente und flexible Implementierung des numerischen Verfahrens, da jedes Element separat behandelt wird und die Kopplung zwischen den Elementen ausschließlich durch den numerischen Fluss über die Elementgrenzen erfolgt. So lassen sich p-Adaption und Parallelisierung beispielsweise sehr einfach formulieren und implementieren.

Eine Schwierigkeit der numerischen Simulation von Wellenausbreitungsvorgängen liegt in der korrekten Behandlung künstlicher Ränder. Nichtreflektierende Randbedingungen lassen sich z.B. mittels exakter Randbedingungen oder Pufferzontechniken realisieren. Ein alternatives und leicht zu implementierendes Konzept besteht in der Verwendung stabilisierter Extrapolationsrandbedingungen.

Numerisches Modell

Formulierung

Die Spektralelemente-Methode kann als Sonderfall der Finite-Elemente-Methode (FEM) aufgefasst werden. Ausgehend von der schwachen Form der partiellen Differentialgleichungen wird der Lösungsvektor \mathbf{U} mittels einer geeigneten Ansatzfunktion φ approximiert.

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{P_{x,e}} \sum_{j=0}^{P_{y,e}} \mathbf{U}_{ij,e}(t) \varphi_{\xi,i}(\xi_e) \varphi_{\eta,j}(\eta_e) \quad (1)$$

Im Gegensatz zu den klassischen FEM, welche sich durch eine feste Ansatzfunktion auszeichnen, erfolgt die Approximation mittels einer polynomialen Basis φ , deren Ordnung beliebig gewählt werden kann. Der numerische Fehler verhält sich proportional h^{p+1} , wobei h die Gitterweite und p den Grad der Ansatzfunktion darstellt. Eine Verringerung des numerischen Fehlers ist durch die Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade möglich. Bei herkömmlichen FEM erfolgt dies durch die Verringerung der Gitterweite h . SEM ermöglichen die Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade durch das Anheben des Grades der Ansatzfunktion. Somit erreichen sie im Vergleich

zu den FEM bei der gleichen Anzahl der Freiheitsgrade eine exponentielle Konvergenz [1].

Die diskontinuierliche Galerkin-Formulierung erlaubt Unstetigkeiten des Lösungsfeldes an den Grenzen des Elementes. Die Kopplung der einzelnen Elemente erfolgt hierbei ausschließlich über den numerischen Fluss \mathbf{H} , der sich beispielsweise aus der Flussfunktion nach Roe berechnet [2].

Diese Art der Elementkopplung ermöglicht es, für jedes Element sowohl unterschiedliche Grade der Ansatzfunktion p als auch verschiedene Quadraturbasen zu definieren. Somit erfolgt eine optimale Anpassung der Diskretisierung an die lokalen Strömungsverhältnisse.

Stabilisierung

Numerische Oszillationen, die sich vor allem in der Nähe von Diskontinuitäten ausbilden, können zu einer instabilen Lösung führen. Eine Lösungsmöglichkeit liegt in der Begrenzung des numerischen Flusses oder der Lösung bzw. ihrer Gradienten selbst [3]. Allerdings glättet diese Art der Stabilisierung Extremwerte, verschmiert akustische Wellen und reduziert lokal die Genauigkeit. Die Auswahl eines geeigneten Kriteriums, an welcher Stelle der Begrenzer arbeitet und wo nicht, ist somit für ein stabiles und genaues Verfahren essentiell.

Der hier verwendete Begrenzer verwendet für die Begrenzung der Gradienten ∇U_0 des Elementes Ω_0 die Elementmittelwerte \bar{U} der Elemente, die direkt an eine Seitenfläche des Elementes angrenzen ($\Omega_{1,\dots,4}$). Zur

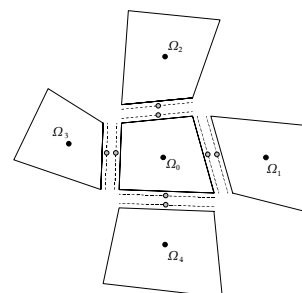


Abbildung 1: Begrenzungsverfahren.

übersichtlicheren Darstellung erfolgt die Formulierung des Anstiegsbegrenzers nur für eine skalare Variable, die Begrenzung sämtlicher Variablen eines Systems erfolgt analog.

Der Vektor \mathbf{n}_{ij} mit $i = 1..4, j = i+1 \forall i \leq 3; i=4, j=1$ sonst

berechnet sich gemäß

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|} \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_i^T = (x_i, y_i, \bar{U}_i); \quad \mathbf{x}_0^T = (x_0, y_0, \bar{U}_0)$$

und definiert somit die Tangentialebene durch die drei Punkte $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ und \mathbf{x}_0 . Hieraus lassen sich mittels

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}_{ij} = 0 \quad (3)$$

die Gradienten $(\partial_x U)_k$ und $(\partial_y U)_k$ mit $k=1..4$ bestimmen. Mit der *minmod*-Funktion und dem konstanten Faktor $\alpha = 1$ erfolgt die Begrenzung der Lösungsgradienten $\partial_x U_0$ und $\partial_y U_0$ im Element Ω_0 gemäß

$$\begin{aligned} \Pi \partial_x U_0 &= \alpha \cdot \text{minmod}(\partial_x U_0, (\partial_x U)_k) \\ \Pi \partial_y U_0 &= \alpha \cdot \text{minmod}(\partial_y U_0, (\partial_y U)_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Extrapolationsrandbedingungen

Formulierung

Die Idee der Methode liegt darin, während der einzelnen Zeitintegrationsschritte keine zusätzlichen Zwangsbedingungen an offenen Rändern zu definieren, es werden lediglich Werte aus dem Inneren des Integrationsgebiet auf dem Rand verwendet (\rightarrow Extrapolation). Dieses Verfahren führt zwangsläufig zu unnatürlichen Oszillationen und Instabilitäten, da keine Korrektur einlaufender Charakteristiken gewährleistet ist. Konsequenterweise erfolgt die Anwendung des oben definierten Anstiegsbegrenzers auf sämtliche Elementen, die mit mindestens einer Elementkante an einen offenen Rand angrenzen. Numerische Tests zeigten einerseits eine zufriedenstellende Stabilisierung des Systems, andererseits konnten unphysikalische Reflektionen an offenen Rändern deutlich reduziert werden. Allerdings war das System schlecht konditioniert, d.h. die Lösung begann bei der Integration über einen längeren Zeitraum kontinuierlich anzuwachsen. Unsere Tests zeigten, dass die Anpassung des konstanten Faktors α in der Gleichung 4 auf $\alpha = 2/3$ das Anwachsen der Lösung konsequent verhinderte, dabei aber keinen signifikanten Einfluss auf die Reflektionseigenschaften des künstlichen Randes ausübte. Somit ist ein robustes Verfahren zur Behandlung offener Ränder vorhanden, dass im Vergleich zu alternativen Randbehandlungen keine weiteren Anforderungen an das Strömungsfeld stellt. Die Wirkungsweise der Randbehandlung im Vergleich zu der Behandlung der eindimensionalen charakteristischen Variablen [4] wird in dem folgenden Kapitel aufgezeigt.

Numerische Tests

Der folgende Abschnitt vergleicht in Abhängigkeit von dem Winkel ϕ den Einfluss der Austrittsrandbehandlung auf die Ausbreitung und Absorption eines Druckimpulses mit $(\Delta p)_{max} = 700 Pa$. Die Berechnung erfolgte sowohl unter Verwendung von Extrapolationsrandbedingungen als auch den charakteristischen Randbehandlungen. Zum Vergleich der Effizienz der Verfahren erfolgte die Bestimmung der Referenzlösung auf einem am rechten Rand deutlich erweiterten Rechengebiet.

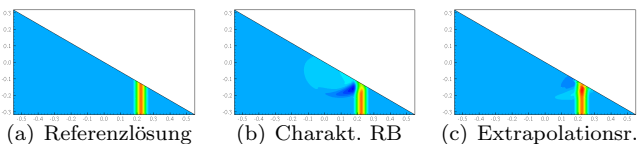


Abbildung 2: Akustischer Schwankungsanteil Δp_{stat} bei der Ausbreitung einer akustischen Welle, Polynomgrad: $P = 3$, Gitter: $\Delta x = \Delta y = 1/100$, $\phi = 60^\circ$.

Die Abbildung 2 zeigt auf, dass beide Randbehandlungsverfahren unnatürliche Reflektionen verursachen, die Amplitude resultierend aus der charakteristischen Randbehandlung aber einen deutlich höheren Wert annimmt. Dieses Verhalten wird ebenfalls durch die Abbildung 3 verdeutlicht. Während für Winkel unter 45° beide Verfahren zufriedenstellende und vergleichbare Absorptionseigenschaften aufweisen, produziert die charakteristische Randbehandlung bei höheren Winkeln einen bis zu einer Größenordnung größeren Fehler.

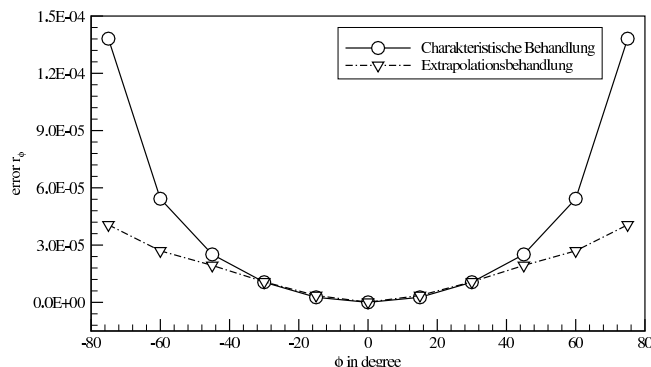


Abbildung 3: Winkelabhängiger Reflektionskoeffizient

Literatur

- [1] Karniadakis, G. Sherwin, S.: Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics, Second Edition. Oxford University Press Inc., New York, 2005
- [2] Hirsch C.: Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1 & 2. Wiley-Interscience Publication, New York, 1990
- [3] Szabo, B., Babuška, I.: Introduction to Finite Element Analysis. Wiley-Interscience Publication, New York, 1990
- [4] Leveque, R.J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, 2002