

# Bjerkneskräfte und gleichgerichtete Diffusion in laufenden und stehenden Wellenfeldern

Jann Ohle Claussen, Robert Mettin<sup>1</sup>, Werner Lauterborn

Drittes Physikalisches Institut, Universität Göttingen,  
Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen, Deutschland,

<sup>1</sup>Email: R.Mettin@physik3.gwdg.de

## Einleitung

Akustische Kavitationsblasen [1] können über viele Schwingungszyklen existieren und dabei ihren Ort im Schallfeld sowie ihre Größe verändern. Ersteres ist durch akustische (Bjerknes-) Kräfte, letzteres durch "gleichgerichtete" Gasdiffusion verursacht. Beides hängt vom Pulsationsverhalten der Blasen ab, das wiederum von Blasenruheradius und dem lokalen Schalldruck bestimmt wird. Dies führt zu rückgekoppelter Dynamik, die für eine Blase als Pfad im Parameterraum, als "Kavitationszyklus", dargestellt werden kann. Hier sollen einige typische Zyklen von Blasen diskutiert werden.

## Modell

Eine am Ort  $x$  in der Flüssigkeit entstandene Gasblase vom Ruheradius  $R_0$  spürt im harmonischen Schallfeld einen Wechseldruck von  $p_a(x, t) = P_a(x) \cos(\omega t - \phi(x))$ , worauf sich eine Volumenschwingung  $V(t) = (4\pi/3)R^3(t)$  einstellt. Für die als sphärisch angenommene Blasen-schwingung wird ein Keller-Miksis-Modell wie in [2] verwendet. Die Oszillation führt durch gleichgerichtete Diffusion [3] zu einer Ruheradiusänderung von der Form

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{Dk_B T c_0}{R_0 p_\infty} \langle R/R_0 \rangle \left( 1 + \frac{4\sigma}{3p_\infty R_0} \right)^{-1} \times \left( \frac{c_\infty}{c_{sat}} - \frac{\langle (R/R_0)^4 (p_g/p_\infty) \rangle}{\langle (R/R_0)^4 \rangle} \right) \quad (1)$$

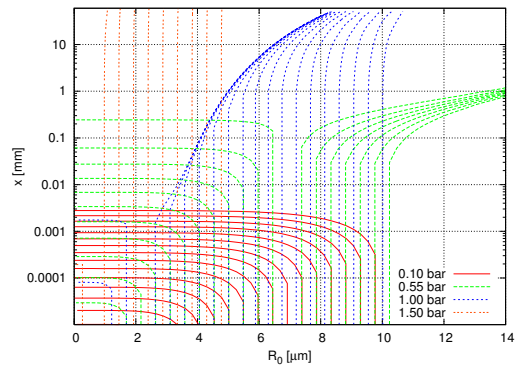
(leichte Modifikationen von Gl.(1) werden in [4] angegeben). Hierbei bedeuten  $D$  und  $k_B$  Diffusions- und Boltzmann-Konstante,  $T$  absolute Temperatur,  $p_\infty$  und  $c_\infty$  den Druck und die Gaskonzentration fern der Blase,  $c_{sat}$  die Gassättigungskonzentration,  $\sigma$  die Oberflächenspannung und  $\langle \dots \rangle$  das Zeitmittel. Wächst eine Blase zu stark an, wird ihre Kugelform instabil werden. Dann finden Abspaltungsprozesse statt, die wieder zu kleineren Ruheradien führen. Diese Instabilität wird in diesem Modell durch parametrisches Anschwingen von Oberflächenmoden festgestellt (siehe [2]).

Außerdem wirkt die primäre Bjerkneskraft  $F_B = -\langle V(t) \nabla p_a(x, t) \rangle$  [1] auf die Blase. Hier können wir schreiben

$$F_B = -\nabla P_a(x) \langle V(t) \cos(\omega t - \phi(x)) \rangle - P_a(x) \nabla \phi(x) \langle V(t) \sin(\omega t - \phi(x)) \rangle. \quad (2)$$

Wir nehmen an, dass  $F_B$  durch eine viskose Reibungskraft (drag) der Größe  $F_D = -11\pi\mu \langle R \rangle v$  kompensiert

wird, wobei  $v$  die resultierende Blasengeschwindigkeit ist. Unter der weiteren Annahme, dass Diffusion und Translation auf langsameren Zeitskalen als die Volumenoszillation ablaufen, kann man die obigen Zeitmittel über einige akustische Perioden rechtfertigen und bekommt eine langsame Veränderung der Blasenparameter  $R_0$  und  $x$ . Falls eine räumlich variierende Schalldruckamplitude  $P_a(x)$  vorgegeben ist, kann man auch ein Wandern im  $R_0$ - $P_a$ -Raum angeben.



**Abbildung 1:** Blasentranslation in einer ebenen laufenden Welle ( $f = 20$  kHz). Es ist der zurückgelegte Weg  $x$  in Wellenausbreitungsrichtung über dem Ruheradius  $R_0$  aufgetragen; verschiedene Druckamplituden sind farbcodiert. Bewegungsrichtung ist immer in positive  $x$ -Richtung. Kleine Blasen lösen sich quasi auf der Stelle auf, und nur diffusiv anwachsende Blasen legen signifikante Strecken zurück.

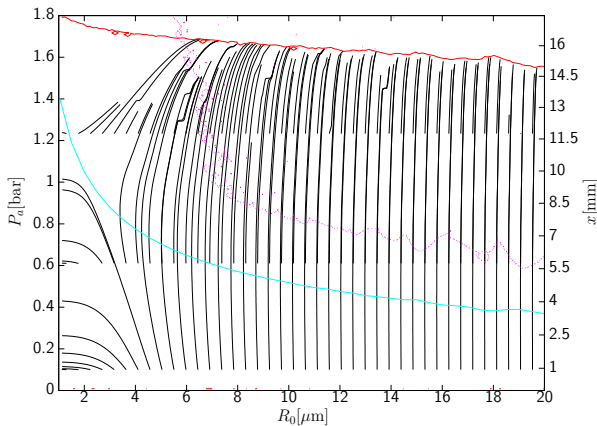
## Laufende Schallwelle

Im Folgenden betrachten wir eine ebene in positiver  $x$ -Richtung fortschreitende Welle,  $p_a(x, t) = \hat{P}_a \cos(\omega t - kx)$ , mit den Parametern  $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 20$  kHz,  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ,  $c = 1486$  m/s (Schallgeschwindigkeit in Wasser). In Gl. (2) wird nun  $\nabla P_a = 0$  und  $\nabla \phi = k$ . Blasen verschiedener Ausgangsgröße starten bei  $x = 0$  und laufen dann, durch die primäre Bjerkneskraft getrieben, in Richtung der Wellenausbreitung. Gleichzeitig ändern sie diffusiv ihren Ruheradius. In Abb. 1 sind typische Trajektorien in der  $R_0$ - $x$ -Ebene gezeigt, wobei die Farben verschiedene Schalldrücke markieren. Es wurde für isotherme Blasen-schwingung und gasgesättigtes Wasser gerechnet. Bei schwacher Anregung bis ca. 0,1 bar lösen sich alle Blasen unter  $10 \mu\text{m}$  schließlich auf, wobei sie eine Strecke zurücklegen, die etwa mit  $R_0^4$  skaliert. Bei steigenden Anregungsdrücken bis ca. 1,0 bar liegen die größeren Blasen zunehmend über der gleichgerichteten

Diffusionsschwelle und wachsen daher an. Dabei scheinen die Blasengrößen über längere Translationswege zu konvergieren: die Anwachsrate  $\Delta R_0/\Delta x$  ist für kleinere Blasen zunächst höher. Bei Wechseldruckamplituden jenseits von etwa 1.5 bar sind die Bjerkneskräfte schließlich so stark, dass die Diffusion für Blasen oberhalb der Diffusionsschwelle (dann bei  $R_0 \approx 1\mu\text{m}$ ) vernachlässigt werden kann: Sie erreichen Driftwege jenseits einer Wellenlänge, ohne signifikant zu wachsen. Oberflächenstabilität wurde bei dem Gesagten zunächst vernachlässigt, führt aber natürlich zu einer von  $\hat{P}_a$  abhängigen Obergrenze von  $R_0$ .

### Stehende Schallwelle

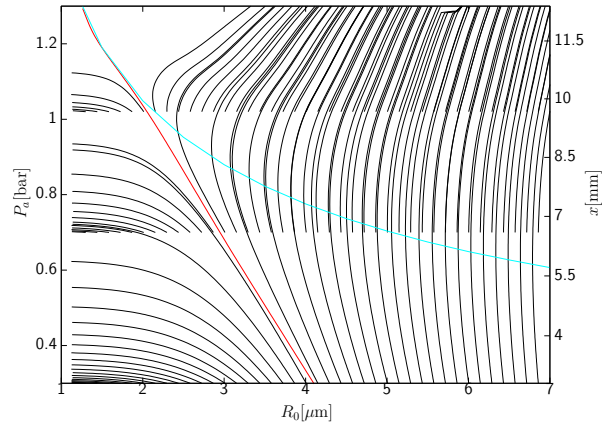
Wir nehmen nun eine ebene Stehwelle an von der Form  $p_a(x, t) = \hat{P}_a \sin(kx) \cos(\omega t)$ , d.h.  $\nabla P_a = \hat{P}_a k \cos(kx)$  und  $\nabla \phi = 0$  in Gl. (2). Es sei wiederum  $f = 20\text{ kHz}$ ,  $c_\infty = c_{\text{sat}}$  sowie  $\hat{P}_a = 2.5\text{ bar}$  beispielhaft gewählt. Die Blasenposition  $x$  ist nun direkt mit der Druckamplitude gekoppelt, weswegen wir in Abb. 2 die Trajektorien in der  $R_0$ - $\hat{P}_a$ -Ebene darstellen können. Man erkennt, dass Blasen oberhalb der Diffusionsschwelle anwachsen und zu größeren Druckamplituden wandern, bis sie die Inversionsschwelle der primären Bjerkneskraft treffen [5]. Da Blasen, die die Oberflächeninstabilitätslinie passiert haben, relativ schnell in kleinere Fragmente zerfallen dürften, erwartet man eine Akkumulation der Blasenpopulation bei Ruheradien kleiner etwa  $5\mu\text{m}$  und Regionen mit Schalldruckwerten um 1.7 bar (unabhängig von  $\hat{P}_a$  für  $\hat{P}_a > 1.7\text{ bar}$ ).



**Abbildung 2:** Parameterraum der Kavitationsblasen ( $R_0$  und  $P_a$ , linke Ordinate, bzw.  $x$ , rechte Ordinate) mit Oberflächenstabilitätsgrenze (rosa gepunktet), Grenze für gleichgerichtete Diffusion (blau), Bjerkneskraftumkehr (rot) sowie Beispieltrajektorien (schwarze Kurven; zeitlicher Verlauf immer nach oben);  $f = 20\text{ kHz}$ ,  $\hat{P}_a = 2.5\text{ bar}$ .

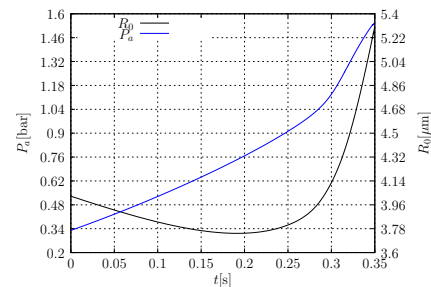
Es zeigt sich nun, dass von den Blasen unterhalb der Diffusionsschwelle nicht etwa alle sich vollständig auflösen, sondern dass ein großer Anteil, selbst aus Bereichen mit sehr schwachen Anregungsdrücken, letztendlich anwächst. Die Ursache ist die relativ rasche Translation in Stehwellengebiete höheren Wechseldruckes und somit oberhalb der Diffusionsschwelle: Viele Blasen können dem Auflösungsprozess “entkommen”. Zur Verdeutlichung wurde in Abb. 3 ein Bereich vergrößert dar-

gestellt, in dem diese “translatorische” Diffusionsschwelle gewissermaßen als Wasserscheide sichtbar wird.



**Abbildung 3:** Beispieltrajektorien (schwarze Kurven) im  $R_0$ - $P_a$ -Raum: Blasen rechts der roten Linie (“Wasserscheide”) wachsen letztendlich an. Parameter wie in Abb. 2.

Einen typischen Verlauf von Ruheradius und lokalem Anregungsdruck zeigt Abb. 4. Die Blase läuft ständig auf den Druckbauch zu, schrumpft dabei allerdings die ersten 0.2s, um danach beschleunigt anzuwachsen. Sie stößt schließlich gegen die Oberflächeninstabilitätsgrenze in der Nähe des Akkumulationspunktes.



**Abbildung 4:** Zeitverlauf von  $R_0$  (schwarz, rechte Ordinate) und  $P_a$  (blau, linke Ordinate) einer Blase, die zunächst schrumpft, dann aber durch Translation in Bereiche höherer Druckamplitude schließlich wieder anwächst.

### Zusammenfassung

Durch die simultane Betrachtung von Translation und Diffusion akustischer Kavitationsblasen bei 20 kHz wurden deren Pfade im Parameterraum aus Ort und Ruheradius berechnet. In laufenden Wellen ist für kleine Blasen das Verhalten unter etwa 0.1 bar Anregungsdruck diffusionsdominiert, oberhalb etwa 1.5 bar translationsdominiert. In stehenden Wellen wird durch die räumliche Blasen drift die effektive Diffusionsschwelle stark abgesenkt.

### Literatur

- [1] F. R. Young, *Cavitation*, McGraw-Hill 1989; T. G. Leighton, *The Acoustic Bubble*, Academic Press 1994.
- [2] D. Krefting *et al.*, J. Acoust. Soc. Am. **112**, 1918 (2002).
- [3] A. I. Eller & H. G. Flynn, J. Acoust. Soc. Am. **37**, 493 (1965); L. A. Crum, Ultrasonics **22**, 215 (1984).
- [4] M. M. Fyrillas & A. J. Szeri, J. Fluid Mech. **277**, 381 (1994); O. Louisnard & F. Gomez, Phys. Rev. E **67**, 036610 (2003).
- [5] I. Akhatov *et al.*, Phys. Rev. E **55**, 3747 (1997).