Ein objekt-orientierter Ansatz zur linear-akustischen Modellbildung komplexer Schalldämpfersysteme

Bernhard Karl Bachner
86161 Augsburg, Deutschland, Email: b.k.bachner@gmx.net

Einleitung

Zur Simulation 1-dimensionaler Wellenausbreitungsvorgänge in Rohrleitungssystemen stellen Transfermatrizenverfahren [1, 2] aufgrund ihrer Einfachheit eine für industrielle Anwendungen praktikable Methode dar. Die Anwendung dieser klassischen 2-Tor- bzw. 4-Pol-Methoden ist aber auf Systeme mit einem einfachen nicht verzweigten Schallflusspfad beschränkt.

Diese Einschränkung verhindert den Einsatz dieser Verfahren zur Simulation von Abgassystemen im Automobilbereich, da diese durch das Vorhandensein von kontinuierlichen Mehr-Tor-Elementen wie Lochrohren sowie in vielen Fällen durch einen netzwerkartigen Schallfluss gekennzeichnet sind. Zur Beschreibung von akustischen Netzwerken wurden obige Verfahren erweitert [3, 4], wobei zwar konzentrierte Mehr-Tor-Elemente Eingang fanden aber kontinuierliche Wellenleiter auf 2-Tor-Elemente beschränkt blieben. Im Folgenden wird eine Formulierung vorgestellt, welche die Integration kontinuierlicher Mehr-Tor-Elemente in die Modellbildung eines akustischen Netzwerks in einfacher Weise ermöglicht.

Modellbildung der Übertragungselemente

Übertragungselemente lassen sich anhand ihrer Längsabmessungen in zwei Klassen einteilen. Kontinuierliche Elemente weisen eine Längserstreckung von ähnlicher Größenordnung auf wie die des betrachteten Wellenlängenbereichs. Diese Elemente werden im Folgenden auch als Wellenleiter bezeichnet. Bei konzentrierten Elementen hingegen kann die Längserstreckung gegenüber den betrachteten Wellenlängen als vernachlässigbar klein angesehen werden. Diese zweite Klasse besteht aus Verbindungselementen.

Kontinuierliche Elemente — Wellenleiter

Zur Ableitung der Übertragungsmatrix greift man vorteilhafter Weise auf eine Formulierung der fluidmechanischen Grundgleichungen in Zustandsform zurück. Dazu wird der Zustandsvektor

$$\mathbf{s}(x,t) = \{p_j(x,t), \rho_j(x,t), u_j(x,t)\}^\top , \quad j = 1 \ldots m \quad (1)$$

definiert, welcher den Schalldruck p_j, die Dichteschwankung ρ_j und die Schallschnelle u_j enthält. Der Index j numeriert die zugehörigen Anschluss-Tore an einem Ende des Wellenleiters. Die Zustandsgleichung lautet in Normalform

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{s}(x,t) - \mathbf{B}_1(x)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}(x,t) - \mathbf{B}_2(x)\mathbf{s}(x,t) = \mathbf{0} \, . \quad (2)$$

Nach Transformation des Zustandsvektors in den Frequenzbereich $\mathbf{s}(x,t) = \underline{\mathbf{s}}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ erhält man mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{B}(x,\omega) = [\mathrm{j}\omega\mathbf{B}_1(x) + \mathbf{B}_2(x)]$ das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x}\underline{\mathbf{s}}(x,\omega) = \mathbf{B}(x,\omega)\underline{\mathbf{s}}(x,\omega) \, . \quad (3)$$

Die Übertragungsmatrix des Wellenleiters zwischen zwei Koordinaten x_0 und x_n wird mit Hilfe des Matrizantenverfahrens [5] aus (3) erhalten.

$$\underline{\mathbf{s}}(x_n,\omega) = [\mathbf{B}(x,\omega)]_{x_0}^{x_n}\,\underline{\mathbf{s}}(x_0,\omega) \quad (4)$$

Für die numerische Auswertung des Matrizanten $[\mathbf{B}(x,\omega)]_{x_0}^{x_n}$ wird das Intervall (x_0, x_n) in Teilintervalle (x_{i-1}, x_i) mit $i = 1 \ldots n$ zerlegt. Bei hinreichend kleiner Diskretisierung können für jeden inkrementellen Matrizanten $[\mathbf{B}(x,\omega)]_{x_{i-1}}^{x_i}$ die x-abhängigen Matrizenkoeffizienten durch ihre festen Werte an den Stellen $\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ ersetzt werden. Der Matrizant des Intervalls (x_0, x_n) wird in der Folge durch das Produkt der inkrementellen Matrizanten approximiert

$$[\mathbf{B}(x,\omega)]_{x_0}^{x_n} \approx \prod_{i=n}^{1} [\mathbf{B}(\xi_i,\omega)]_{x_{i-1}}^{x_i} \, . \quad (5)$$

Dieses Produkt kann physikalisch als Kaskade inkrementeller Mehr-Tor-Wellenleiter aufgefasst werden, welche jeweils durch ein Differentialgleichungssystem mit konstanter Koeffizientenmatrix $\mathbf{B}_i(\omega) = \mathbf{B}(\xi_i,\omega)$ beschrieben werden. Dessen Lösung ergibt sich als Exponentialfunktion der Koeffizientenmatrix und führt auf die Übertragungsmatrix zwischen den Zustandsvektoren $\underline{\mathbf{s}}_{i-1}(\omega)$ und $\underline{\mathbf{s}}_i(\omega)$. Sie wird bei einfacher Vielfachheit jedes Eigenwerts von $\mathbf{B}_i(\omega)$ als

$$\mathrm{e}^{\mathbf{B}_i(\omega)\Delta x} = \mathbf{\Psi}_i(\omega)\,\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}_i(\omega)\Delta x}\right)\mathbf{\Psi}_i^{-1}(\omega) \quad (6)$$

gefunden. Darin bezeichnet $\mathbf{\Psi}_i(\omega)$ die Matrix der Linkseigenvektoren und $\boldsymbol{\beta}_i(\omega)$ den Vektor der Eigenwerte von $\mathbf{B}_i(\omega)$. Die Eigenwerttransformation ermöglicht die Definition neuer Zustandsvektoren

$$\left[\underline{\mathbf{s}}_{i-1}^{\pm}(\omega) \quad \underline{\mathbf{s}}_i^{\pm}(\omega)\right] = \mathbf{\Psi}_i^{-1}(\omega)\left[\underline{\mathbf{s}}_{i-1}(\omega) \quad \underline{\mathbf{s}}_i(\omega)\right] \, . \quad (7)$$

Abhängig von der Normierung der Eigenvektoren bestehen die Zustandsvektoren aus Schalldruck- oder Schallschnellewellen, wobei die Unterscheidung von vor- und rücklaufenden Wellen aus den Vorzeichen der Imaginärteile der Eigenwerte resultiert. Nach Aufteilung der Eigenwerte auf die Vektoren $\boldsymbol{\beta}_i^{+}(\omega)$ und $\boldsymbol{\beta}_i^{-}(\omega)$, wird die Übertragungsmatrix des inkrementellen Wellenleiters mit Index i als

$$\mathbf{G}_i(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\beta}_i^-(\omega)\Delta x}\right) \\ \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}_i^+(\omega)\Delta x}\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

definiert. Dieser Form der Übertragungsmatrix liegt eine Konvention für die Wellenvektoren zugrunde, welche jeweils einen Vektor aus sämtlichen in ein Element eintretenden Wellen $\underline{\mathbf{s}}_{g,i}^{\oplus}(\omega) = \{\underline{\mathbf{s}}_{i-1}^{+}(\omega), \underline{\mathbf{s}}_{i}^{-}(\omega)\}^{\top}$ sowie einen zweiten Vektor aus allen das Element verlassenden Wellen $\underline{\mathbf{s}}_{g,i}^{\ominus}(\omega) = \{\underline{\mathbf{s}}_{i-1}^{-}(\omega), \underline{\mathbf{s}}_{i}^{+}(\omega)\}^{\top}$ bildet. Nach [4] können aktive Wellenleiter durch Addition eines Quellvektors $\underline{\mathbf{q}}_{g,i}^{\ominus}(\omega)$ beschrieben werden. Die Übertragungsgleichung für die Wellenvektoren lautet damit

$$\underline{\mathbf{s}}_{g,i}^{\ominus}(\omega) = \mathbf{G}_i(\omega)\underline{\mathbf{s}}_{g,i}^{\oplus}(\omega) + \underline{\mathbf{q}}_{g,i}^{\ominus}(\omega)\ . \quad (9)$$

Die Rücktransformation der Wellenvektoren auf einen Zustandsvektor $\underline{\mathbf{s}}_{g,i}(\omega) = \{\underline{\mathbf{s}}_{i-1}(\omega), \underline{\mathbf{s}}_{i}(\omega)\}^{\top}$ gelingt mit Hilfe der Eigenvektormatrizen $\boldsymbol{\Psi}_i^+(\omega)$ und $\boldsymbol{\Psi}_i^-(\omega)$. Mit den Abkürzungen für eine Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_i(\omega) = \mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\Psi}_i^+(\omega), \boldsymbol{\Psi}_i^-(\omega)\right) + \mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\Psi}_i^-(\omega), \boldsymbol{\Psi}_i^+(\omega)\right)\mathbf{G}_i(\omega) \quad (10)$$

und für einen transformierten Quellvektor

$$\underline{\mathbf{q}}_{g,i}(\omega) = \mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\Psi}_i^-(\omega), \boldsymbol{\Psi}_i^+(\omega)\right)\underline{\mathbf{q}}_{g,i}^{\ominus}(\omega) \quad (11)$$

erhält man für die Transformationsgleichung

$$\underline{\mathbf{s}}_{g,i}(\omega) = \mathbf{T}_i(\omega)\underline{\mathbf{s}}_{g,i}^{\oplus}(\omega) + \underline{\mathbf{q}}_{g,i}(\omega)\ . \quad (12)$$

Konzentrierte Elemente — Verbindungen

Die Zustandsgleichung dieser Elementart ist durch das Fehlen einer Ortsableitung gekennzeichnet. Mit einem Zustandsvektor

$$\mathbf{s}_n(t) = \{p_j(t), \rho_j(t), u_j(t)\}^{\top}, \quad j = 1 \ldots m\ , \quad (13)$$

worin der Index j die Nummer des zugehörigen Anschluss-Tors bezeichnet, und dem Quellvektor $\mathbf{q}_n(t)$ lautet die Normalform

$$\mathbf{N}_1\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{s}_n(t) + \mathbf{N}_2\mathbf{s}_n(t) = \mathbf{q}_n(t)\ . \quad (14)$$

Durch die Transformationen $\mathbf{s}_n(t) = \underline{\mathbf{s}}_n(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ und $\mathbf{q}_n(t) = \underline{\mathbf{q}}_n(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ erhält man mit der komplexen Koeffizientenmatrix $\mathbf{N}(\omega) = [\mathrm{j}\omega\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2]$ die Übertragungsgleichung eines Verbindungselements im Frequenzbereich

$$\mathbf{N}(\omega)\underline{\mathbf{s}}_n(\omega) = \underline{\mathbf{q}}_n(\omega)\ . \quad (15)$$

Modellbildung des Gesamtsystems

Die Abbildung eines Gesamtsystems, welches aus $i = 1 \ldots n$ Wellenleitern und $j = 1 \ldots m$ Verbindungselementen besteht, geschieht durch eine geeignete Zusammenführung der Matrizengleichungen sämtlicher Elemente. Dazu wird ein Zustandsvektor des Gesamtsystems $\underline{\mathbf{s}}(\omega) = \{\underline{\mathbf{s}}_{g,i}(\omega)\}^{\top}$ definiert, welcher einem Spaltenvektor gebildet aus den Zustandsvektoren $\underline{\mathbf{s}}_{g,i}(\omega)$ aller Wellenleiter entspricht. Ebenso werden entsprechende Wellenvektoren $\underline{\mathbf{s}}^{\oplus}(\omega)$ und $\underline{\mathbf{s}}^{\ominus}(\omega)$ sowie Quellvektoren $\underline{\mathbf{q}}_g^{\ominus}(\omega)$ und $\underline{\mathbf{q}}_g(\omega)$ gebildet. Mit den Blockdiagonalmatrizen $\mathbf{G}_s(\omega) = \mathrm{diag}\,(\mathbf{G}_i(\omega))$ und $\mathbf{T}_s(\omega) = \mathrm{diag}\,(\mathbf{T}_i(\omega))$ lassen sich dann eine zusammengefasste Übertragungsgleichung aller Wellenleiter

$$\underline{\mathbf{s}}^{\ominus}(\omega) = \mathbf{G}_s(\omega)\underline{\mathbf{s}}^{\oplus}(\omega) + \underline{\mathbf{q}}_g^{\ominus}(\omega) \quad (16)$$

und die zugehörige Transformationsgleichung

$$\underline{\mathbf{s}}(\omega) = \mathbf{T}_s(\omega)\underline{\mathbf{s}}^{\oplus}(\omega) + \underline{\mathbf{q}}_g(\omega) \quad (17)$$

aufstellen. Um den Zustandsvektor $\underline{\mathbf{s}}(\omega)$ auch in die Blockmatrizengleichung der Verbindungselemente einführen zu können, wird eine Projektionsmatrize $\boldsymbol{\Pi}$ definiert, welche den Zustandsvektor $\underline{\mathbf{s}}(\omega) = \{\underline{\mathbf{s}}_{g,i}(\omega)\}^{\top}$ auf den Spaltenvektor $\{\underline{\mathbf{s}}_{n,j}(\omega)\}^{\top}$ aller Verbindungselemente abbildet.

$$\{\underline{\mathbf{s}}_{n,j}(\omega)\}^{\top} = \boldsymbol{\Pi}\ \{\underline{\mathbf{s}}_{g,i}(\omega)\}^{\top} \quad (18)$$

Mit dem Quellvektor $\underline{\mathbf{q}}_n(\omega) = \{\underline{\mathbf{q}}_{n,j}(\omega)\}^{\top}$ und der Blockdiagonalmatrix $\mathbf{N}_s(\omega) = \mathrm{diag}\,(\mathbf{N}_j(\omega))$ wird dann die zusammengefasste Übertragungsgleichung der Verbindungselemente

$$\mathbf{N}_s(\omega)\,\boldsymbol{\Pi}\,\underline{\mathbf{s}}(\omega) = \underline{\mathbf{q}}_n(\omega) \quad (19)$$

gefunden. Die Substitution von (17) in (19) definiert die Systemmatrix

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{N}_s(\omega)\,\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{T}_s(\omega) \quad (20)$$

und den Quellvektor

$$\underline{\mathbf{q}}(\omega) = \underline{\mathbf{q}}_n(\omega) - \mathbf{N}_s(\omega)\,\boldsymbol{\Pi}\,\underline{\mathbf{q}}_g(\omega) \quad (21)$$

des Gesamtsystems. Mit diesen beiden Definitionen erhält man die Matrizengleichung des Gesamtsystems

$$\mathbf{S}(\omega)\underline{\mathbf{s}}^{\oplus}(\omega) = \underline{\mathbf{q}}(\omega) \quad (22)$$

zur Bestimmung der in die Wellenleiter eintretenden Wellen. Die austretenden Wellen werden aus (16) erhalten, womit das Schallfeld vollständig bestimmt ist.

Literatur

[1] Munjal, M. L.: Acoustics of Ducts and Mufflers. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1987.

[2] Davies, P. O. A. L.: Practical flow duct acoustics. Journal of Sound and Vibration, 124(1):91–115, 1988.

[3] Frid, A.: Fluid vibration in piping systems—a structural mechanics approach, I: Theory. Journal of Sound and Vibration, 133(3):423–438, 1989.

[4] Glav, R. und Åbom, M.: A general formalism for analyzing acoustic 2-port networks. Journal of Sound and Vibration, 202(5):739–747, 1997.

[5] Frazer, R. A., Duncan, W. J. und Collar, A. R.: Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge (1938).