

## Elasto-Akustik-Kopplung auf nichtkonformen Gittern

B. Flemisch<sup>1</sup>, M. Kaltenbacher<sup>2</sup>, B. Wohlmuth<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation, Universität Stuttgart, Email:bernd@iws.uni-stuttgart.de*

<sup>2</sup> *Lehrstuhl für Sensorik (LSE), Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Email: manfred@lse.eei.uni-erlangen.de*

### Einleitung

Im Bereich der Elasto-Akustik-Kopplung ergeben sich für die Diskretisierung des Gebietes zwei stark unterschiedliche Anforderungen an die Maschenweite: Einerseits erfordern eventuelle Heterogenitäten und Nichtlinearitäten eine sehr feine Auflösung der Struktur, andererseits ist für das Akustikgebiet entsprechend der zu erwartenden Wellenlänge eine oft um ein Vielfaches gröbere Auflösung völlig ausreichend. Der hier vorgestellte Ansatz erlaubt, dass die Gitter für Struktur und Fluid am gemeinsamen Interface nicht zusammenpassen. Dadurch wird der Einsatz höchst unterschiedlicher Gitterweiten ermöglicht. Die Effizienz wird anhand eines Anwendungsbeispiels dokumentiert. Darüber hinaus wird auf die Lösung der gekoppelten Gleichungssysteme eingegangen. Hier bietet es sich an, die eventuell nichtlinearen Strukturgleichungen und die linearen Akustikgleichungen in einem iterativen Prozess voneinander entkoppelt zu lösen.

### Problemstellung

Wir betrachten ein von einem akustischen Fluid gefülltes Gebiet  $\Omega^a$  und eine elastische Struktur  $\Omega^e$ . Zur Modellierung des Fluids wird die Wellengleichung für das akustische Geschwindigkeitspotenzial  $\psi$  benutzt,

$$c^{-2}\ddot{\psi} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = 0 \quad \text{in } \Omega^a \times (0, T), \quad (1)$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Das Verhalten der Struktur wird als linear elastisch angenommen, die gesuchten Verschiebungen  $\mathbf{u}$  ergeben sich also aus

$$\rho_e \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_S \quad \text{in } \Omega^e \times (0, T), \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda_L (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \operatorname{Id} + 2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (2b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T). \quad (2c)$$

Hier bezeichnen  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die Spannungen und Verzerrungen, sowie  $\rho_e$  und  $\lambda_L, \mu_L$  die Dichte und die Lamé-Konstanten des betrachteten Materials. Am gemeinsamen Fluid-Struktur-Interface  $\Gamma$  ergeben sich die Kopplungsbedingungen aus der Forderung nach Stetigkeit in der Normalenschnelle und im Druck,

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \psi, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -\rho_a \dot{\psi} \mathbf{n}, \quad (3)$$

wobei  $\mathbf{n}$  die äußeren Einheitsnormale auf  $\Gamma$  und  $\rho_a$  die Dichte des akustischen Fluids bezeichnen. Das aus (1)–(3) resultierende Variationsproblem lautet: Finde ein Paar  $(\psi, \mathbf{u})$  so, dass für alle Testfunktionen  $(w, \mathbf{v})$

$$\begin{aligned} & \langle \rho_e \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega^e} + \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega^e} + \langle \rho_a \mathbf{v}, \dot{\psi} \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}_e, \mathbf{v} \rangle_{\Omega^e}, \\ & \langle \rho_a c^{-2} \ddot{\psi}, w \rangle_{\Omega^a} + \langle \rho_a \operatorname{grad} w, \operatorname{grad} \psi \rangle_{\Omega^a} - \langle \rho_a \dot{\mathbf{u}}, w \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} = 0, \end{aligned}$$

ergänzt durch Anfangs- und Randbedingungen, [2].

### Diskretisierung

Für die Ortsdiskretisierung werden finite Elemente verwendet, wobei die zugrundeliegenden Triangulationen der beiden Teilgebiete am Interface nicht notwendigerweise zusammenpassen müssen. Dies ermöglicht es, auf jedem Teil das jeweils beste Gitter für die Approximation der entsprechenden Größen einzusetzen, ohne auf das andere Teilgebiet Rücksicht nehmen zu müssen. Eine Newmark-Zeitdiskretisierung führt in jedem Zeitschritt auf ein zu lösendes lineares Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{pmatrix} K_u^* & C_{u\psi} \\ -C_{u\psi}^T & K_\psi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ g \end{pmatrix}, \quad (5)$$

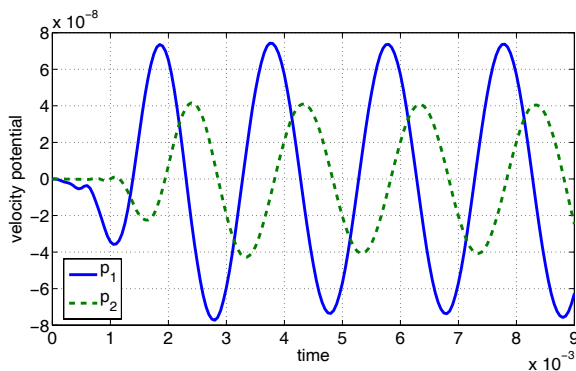
mit geeigneter rechter Seite  $(f, g)^T$ , wobei  $K_\psi^*$  und  $K_u^*$  die effektiven Steifigkeitsmatrizen bezeichnen. Die Kopplung erfolgt mittels der Matrix  $C_{u\psi}$ , deren Einträge durch

$$C_{u\psi} = [C_{pq}], \quad C_{pq} = \int_{\Gamma} \rho_a N_p^a N_q^e \mathbf{n} \, d\Gamma \in \mathbb{R}^d. \quad (6)$$

gegeben sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Basisfunktionen  $N_p^a$  und  $N_q^e$  bezüglich unterschiedlicher Gitter definiert sind. Die Kopplungsmatrix  $C_{u\psi}$  ist die einzige, die bei einer Änderung der Lage der beiden Teilgebiete zueinander neu berechnet werden muss, alle anderen Matrizen bleiben gleich, insbesondere ist auch keine Neuvernetzung erforderlich.

### Anwendungsbeispiel

Es wird ein Lautsprecher betrachtet, [1], bestehend aus einem piezoelektrischen Teil  $\Omega^p$  mit quadratischer Grundfläche von 900mm<sup>2</sup> und Dicke 0.05mm, und einer zentriert aufgebrachten Aluminiummembran  $\Omega^a$  mit Grundfläche 1600mm<sup>2</sup> und Dicke 0.25mm. Die Struktur wird durch Anlegen einer Spannungsdifferenz  $\Delta\varphi(t) = \sin 1000\pi t$  in Schwingung versetzt. Es wird ein Hexaedergitter mit 16×16×1 Elementen für  $\Omega^p$  und 8×8×1 Elementen für  $\Omega^a$  verwendet. Das aus Luft bestehende Akustikgebiet  $\Omega^a$  der Länge und Breite von 3m sowie Höhe von 1.5m wird mit einem uniformen Gitter der Maschenweite 3/32m diskretisiert. Es werden quadratische Ansatzfunktionen verwendet, was auf ca. 70000 Akustik-Freiheitsgrade führt. Abbildung 1 zeigt  $\psi(t)$  in den Knoten  $p_i$  in Entfernung  $i \cdot 0.1875\text{m}$ ,  $i = 1, 2$ . Wäre man in diesem Beispiel gezwungen, das Akustikgitter konform zum Strukturgitter mit einer Maschenweite von 1/200m zu wählen, müsste man bei Verwendung eines uniformen Gitters mit  $(3 \cdot 200 / 32)^3 > 6000$  mal mehr Elementen arbeiten, was die Kapazität heutiger Standard-PCs deutlich übersteigt. Die andere Alternative der sukzessiven Gitteraufweitung hätte das bekannte Problem der



**Abbildung 1:** Akustisches Potenzial in  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , für eine Anregungsfrequenz von 500Hz.

schlechteren Approximation aufgrund gestörter Elementgeometrien zur Folge. Hier zeigt sich deutlich die Qualität des nichtkonformen Ansatzes sowie der resultierende Effizienz- und Flexibilitätsgewinn.

## Lösungsstrategien

**Entkopplung:** Es ist häufig erforderlich, anstatt des linearen Elastizitätsmodells (2) ein nichtlineares Modell für die Struktur  $\Omega^e$  anzusetzen. Analog zum linearen System (5) ergibt sich das gekoppelte nichtlineare System

$$G(\mathbf{u}, \psi) = 0, \quad (7a)$$

$$C_{\psi u} \mathbf{u} + K_{\psi}^* \psi = g, \quad (7b)$$

wobei (7a) aus nichtlinearen Gleichungen besteht, (7b) hingegen nur lineare Gleichungen beinhaltet, [1]. Aus Effizienzgründen ist es daher nicht ratsam, auf das gesamte System (7) ein Newtonverfahren anzuwenden. Stattdessen erscheint eine Entkopplung im Sinne eines Block-Gauß-Seidel-Verfahrens vielversprechend. Dies führt dazu, iterativ für  $k \geq 0$  zuerst das nichtlineare System

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \psi^k) = 0 \quad (8a)$$

zu lösen, um neue Verschiebungen  $\mathbf{u}^{k+1}$  zu erhalten, und anschließend die Lösung  $\psi^{k+1}$  des linearen Systems

$$K_{\psi}^* \psi^{k+1} = g - C_{\psi u} \mathbf{u}^{k+1} \quad (8b)$$

zu berechnen.

**Test:** Für den Test besitzt die Struktur  $\Omega^e$  die Breite 0.2m und die Höhe 0.01m, sowie die Materialparameter von Silizium. Sie ist am linken und rechten Rand eingespannt, am unteren Rand ist eine Oberflächenkraft von  $10^8 \sin(2\pi 1000t) \text{Nm}^{-2}$  vorgegeben. Es wird das geometrisch nichtlineare Elastizitätsmodell eingesetzt. Das akustische Fluid  $\Omega^a$  befindet sich zentral über der Struktur und besitzt die Breite 1.4m und die Höhe 0.7m. Als Medium wird Wasser gewählt. Aufgrund der Symmetrie wird nur die Hälfte des Gebietes für die Berechnung benutzt, für die Struktur wird ein Rechtecksgitter bestehend aus  $48 \times 4$  Elementen verwendet, für das Akustikgebiet wird ein uniformes Vierecksgitter mit  $55 \times 55$  Elementen eingesetzt. Bei einer Toleranz von  $10^{-10}$  für die relative Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterierter führt die Anwendung der Lösungsmethode (8) zu 43 bis 80 benötigten

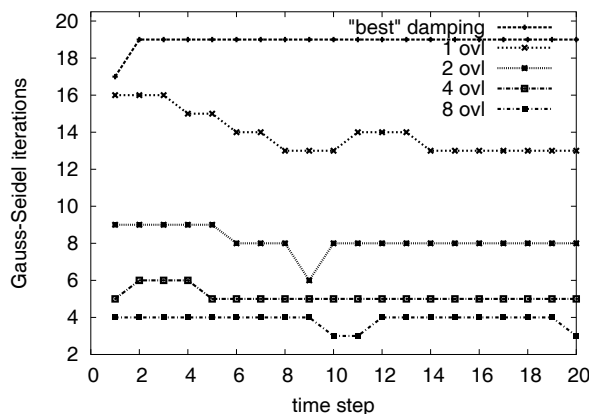
Iterationsschritten pro Zeitschritt. Dieses sehr schlechte Konvergenzverhalten lässt sich deutlich verbessern, wenn eine Dämpfung eingesetzt wird, was hier auf eine stabile Iterationszahl von ca. 19 führt. Allerdings ist diese Anzahl für ein Block- $2 \times 2$ -System noch nicht akzeptabel.

**Überlappender Ansatz:** Um das Konvergenzverhalten der Gauß-Seidel-Methode zu verbessern, wird das akustische Potenzial  $\psi$  so in  $(\psi_1, \psi_2)$  zerlegt, dass die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nur mit  $\psi_1$  koppeln. Die zu  $\psi_1$  gehörigen Freiheitsgrade werden nun formal in den nichtlinearen Teil (7a) des Systems (7) aufgenommen, und damit die Funktion  $G$  zu einer Funktion  $G^o$  erweitert. Für  $k \geq 0$  muss nun alternativ zu (8a) zunächst das nichtlineare System

$$G^o(\mathbf{u}^{k+1}, \psi_1^{k+1}, \psi_2^k) = 0 \quad (8a')$$

gelöst werden, anschließend wird wieder (8b) gelöst.

**Test:** Anhand des oben eingeführten Beispiels wird der Einfluss der Überlappbreite auf das Konvergenzverhalten der neuen Methode (8a'), (8b), getestet. Mit  $\psi_1$  wird der von den untersten  $i$  Elementreihen bedeckte Teil des Akustikgebietes assoziiert,  $i \in \{1, 2, 4, 8\}$ . In Abbildung 2 ist die Anzahl der benötigten Gauß-Seidel-Iterationen pro Zeitschritt geplottet. Bereits die Hinzunahme einer ein-



**Abbildung 2:** Test der Block-Gauß-Seidel-Methode: Iterationsanzahl gegen den Zeitschritt, Variation der Überlappbreite

zigen Elementreihe bewirkt eine deutliche Verbesserung, mit vier Elementreihen erreicht man eine Iterationszahl von ungefähr fünf, was sich durch eine höhere Toleranz noch verringern lässt. Im Vergleich zur nicht überlappenden Methode (8) ist der Aufwand für einen Newton-Schritt nur unmerklich höher. Die Effizienz kann mittels einer inexakten Strategie weiter gesteigert werden, [1].

## Literatur

- [1] B. Flemisch. *Non-matching Triangulations of Curvilinear Interfaces Applied to Electro-Mechanics and Elasto-Acoustics*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 2006.
- [2] B. Flemisch, M. Kaltenbacher, and B. I. Wohlmuth. Elasto-acoustic and acoustic-acoustic coupling on non-matching grids. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 67(13):1791–1810, 2006.