

Randelementmethoden für gekoppelte Feldprobleme

Lothar Gaul¹

¹ *Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik, Universität Stuttgart, Email: gaul@iam.uni-stuttgart.de*

Einleitung

Die akustischen Eigenschaften von Produkten spielen heute eine wichtige Rolle für ihre Qualitätsanmutung. Durch den Einsatz von Akustik-Simulationen lassen sich viele Lärm-Probleme schon früh im Entwicklungsprozess erkennen und die Klangeigenschaften gezielt beeinflussen. Befindet sich das Produkt in Fluid Luft, so wird im allgemeinen die Rückkopplung des Luftschalls auf die Struktur vernachlässigt. Für sehr dünne und flexible Strukturen und im Fall von Fluiden mit hoher Dichte ist dieses Vorgehen nicht mehr zulässig. In dieser Arbeit wird ein effizientes Simulationswerkzeugs vorgestellt, dass die Vorhersage der Schallabstrahlung von komplexen schwingenden fluid-struktur gekoppelten Strukturen ermöglicht.

Schnelle Randelementmethode

Die Randelementmethode (BEM) ist ein Diskretisierungsverfahren für die näherungsweise Lösung von Randintegralgleichungen. Für die Akustik werden diese über die schwache Form der Helmholtz-Gleichung mit der Fundamentallösung als Wichtungsfunktion hergeleitet [1]. Die Randelementmethode ist besonders geeignet für die Simulation von Akustik-Feldern, da nur die Oberfläche der schallabstrahlenden Struktur diskretisiert werden muss und Außenraumprobleme keinen zusätzlichen Aufwand erfordern. Die Anwendung der Randelementmethode wird jedoch durch die vollbesetzten Systemmatrizen erschwert: die Rechenzeit und der Speicherbedarf steigen quadratisch mit der Anzahl der Randelemente an. Dieser numerische Aufwand kann für komplexe industrielle Anwendungen nicht beherrscht werden. Der Multipol-Algorithmus ermöglicht die Auswertung der BEM-Matrix-Vektor-Produkte mit einem numerischen Aufwand, der quasi-linear mit der Anzahl der Freiheitsgrade ansteigt [2]. Für große Randelementmodelle ergibt sich so eine starke Reduktion der Rechenzeit und des Speicherbedarfs. Die Randintegraloperatoren werden für den Multipol-Algorithmus in einen Nahfeld- und einen Fernfeldanteil aufgespalten. Der Nahfeldanteil wird durch eine herkömmliche Auswertung der Fundamentallösung bestimmt. Für den Fernfeldanteil werden die Randelemente in Cluster eingeteilt und in einer Baumstruktur organisiert. Über die Cluster wird die Interaktion der Randelemente im Fernfeld durch eine Multipol-Darstellung der Fundamentallösung berücksichtigt. Die Verwendung von Fern- und Nahfeldrepräsentanten sowie diagonaler Transferoperatoren stellt sich dabei als besonders vorteilhaft heraus.

Auf jeder Ebene des Clusterbaums wird der Nahbereich (N) definiert, für den der Abstand der Cluster unter-

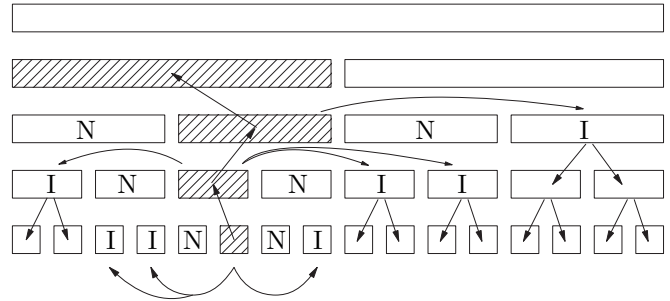


Abbildung 1: Informationsaustausch im Clusterbaum.

halb einer wählbaren Grenze liegt. Cluster, die nicht im Nahbereich selbst, aber im Nahbereich des übergeordneten Clusters liegen, bilden die Interaktionsliste (I). Diese Einteilung ist in Abbildung 1 für eine zweidimensionale Schematisierung des Clusterbaums dargestellt. Den Beitrag eines Randelements im schraffierten Cluster auf der untersten Ebene wird durch die folgenden Schritte des Multipol-Algorithmus berücksichtigt: Auf der untersten Ebene wird der Fernfeldrepräsentant aller Elemente im schraffierten Cluster berechnet. Anschliessend wird der Fernfeldrepräsentant in Nahfeldrepräsentanten für die Interaktionsliste umgewandelt. Daraufhin wird der Fernfeldrepräsentant in das Zentrum des übergeordneten Clusters verschoben. Die beiden vorherigen Schritte werden beim Aufwärtsdurchgang im Clusterbaum wiederholt, bis die Interaktionsliste leer ist. Im sich anschließenden Abwärtsdurchgang werden die berechneten Nahfeldrepräsentanten in die untergeordneten Cluster verschoben. Auf der untersten Ebene wird dann der Nahfeldrepräsentant für jedes Randelement ausgewertet und die Nahfeldbeiträge durch eine direkte Auswertung der Fundamentallösung addiert.

Die benötigte Entwicklungslänge für die Multipol-Repräsentanten hängt sowohl von der Frequenz als auch von den Cluster-Durchmessern ab. Für geeignet gewählte Parameter ist die Rechenzeit und der Speicherbedarf für die Berechnung der Schallabstrahlung von einem L-Gebiet mit neun Elementen pro Wellenlänge in Abbildung 2 dargestellt. Man beobachtet den quasi-linearen Anstieg und die deutliche Reduktion des numerischen Aufwands bei der Multipol-BEM für Modelle mit vielen Freiheitsgraden.

Für die Berechnung von Randelementmodellen mit vielen Freiheitsgraden müssen iterative Gleichungslöser eingesetzt werden. Die bei der Akustik-BEM entstehenden Gleichungssysteme stellen dabei hohe Anforderungen an die Lösungsverfahren: sie sind nicht symmetrisch und nicht positiv definit. Die GMRES (generalized minimal residual) Methode und Mehrgitterlöser

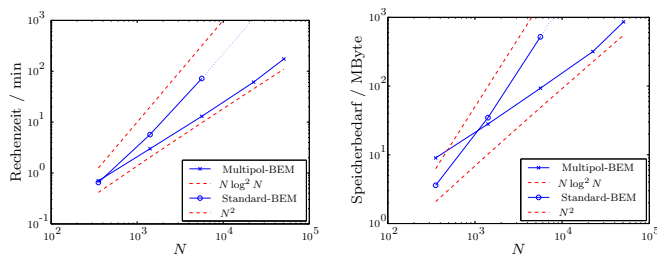


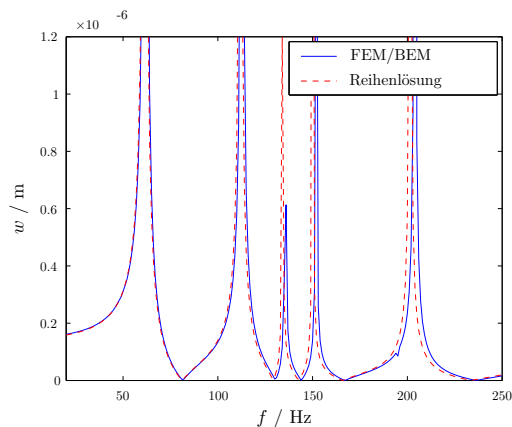
Abbildung 2: Rechenzeit und Speicherbedarf über der Anzahl der Freiheitsgrade N für die Berechnung der Schallabstrahlung von einem L-Gebiet mit neun Elementen pro Wellenlänge.

sind geeignete, effiziente Verfahren. Für die Vorkonditionierung beziehungsweise als Glätter für den Mehrgitterlöser wird ein Approximate-Inverse-Ansatz verwendet. Durch Operator-Splitting wird eine dünn besetzte Näherung des Randintegraloperators berechnet, dessen Inverse direkt approximiert und als Vorkonditionierungsmatrix eingesetzt wird. Durch die Approximate-Inverse-Vorkonditionierung stellen sowohl GMRES als auch der Mehrgitterlöser attraktive Alternativen dar. Für den praktischen Einsatz empfiehlt sich GMRES, da im Gegensatz zum Mehrgitterlöser keine Gitterhierarchie benötigt wird.

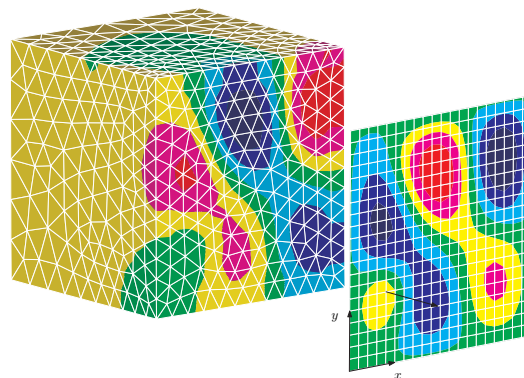
Gekoppelte Schnelle BEM

In der gekoppelten Simulation wird für die Berechnung der Strukturschwingung die Finite-Element-Methode (FEM) für eine Kirchhoff-Platte verwendet. Die Kopplung zwischen der FEM für die Strukturschwingung und der BEM für das Akustik-Feld wird durch einen Mortar-Algorithmus realisiert. Der Druck auf der Plattenoberfläche wird dabei als Lagrange-Multiplikator interpoliert, was die Kopplung von nicht-konformen Diskretisierungen erlaubt. Dadurch können spezielle Ansatz-Funktionen und eine adaptive Netzverfeinerung in den Teilgebieten verwendet werden. Zur Lösung des entstehenden Sattelpunktpblems wird ein Uzawa-Algorithmus eingesetzt. Die reduzierte Gleichung für den Lagrange-Multiplikator wird durch GMRES-Iterationen gelöst, wobei in jedem äußeren Iterationsschritt das innere BEM-System durch eine relaxierte GMRES-Methode mit Vorkonditionierung angenähert wird. Dieses Lösungsverfahren ermöglicht den Einsatz der Multipol-BEM für gekoppelte Berechnungen und damit die Simulation von großen Randelementmodellen [3].

Die Leistungsfähigkeit des Mortar-Algorithmus wird am Beispiel einer elastischen Platte, die mit einem akustischen Innenraumproblem gekoppelt ist, demonstriert. Für dieses Problem wird eine Reihenlösung entwickelt, die als Referenz für die numerischen Ergebnisse dient. In Abbildung 3 ist der berechnete Frequenzgang für die Plattenverschiebung dargestellt. Man erkennt deutlich die gute Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung. Das Konvergenzverhalten des FEM-



(a)



(b)

Abbildung 3: Elastische Platte gekoppelt mit akustischem Innenraum. (a) Plattenverschiebung w in Abhängigkeit der Frequenz f , Anregung der Platte durch Einzelkraft an Position $(0, 2; 0, 3)$ m. (b) Oberflächenverteilung des akustischen Drucks und davor der Plattenverschiebung bei 180 Hz.

BEM-Verfahrens wird bei einer Frequenz von 180 Hz untersucht. Für eine unabhängige Verfeinerung der FEM- und BEM-Netze werden die Fehler der berechneten Felder diskutiert. Als weiteres Beispiel werden Versuche zur aktiven Akustik-Struktur-Regelung simuliert, die im Hydroakustik-Labor des Instituts für Angewandte und Experimentelle Mechanik durchgeführt werden.

Literatur

- [1] L. Gaul, M. Kögl, and M. Wagner. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [2] M. Fischer, U. Gauger, and L. Gaul. A multipole Galerkin boundary element method for acoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(2):155–162, 2004.
- [3] M. Fischer and L. Gaul. Fast BEM-FEM mortar coupling for acoustic-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1677–1690, 2005.