

Effizienter Frequenzansatz zur globalen Approximation der Wandadmittanz mit dem Pade-via-Lanczos-Algorithmus

Robert Anderssohn¹, Hans-Jürgen Hardtke, Daniel Kreuter, Steffen Marburg

Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland

¹*Email: robert.anderssohn@tu-dresden.de*

Einleitung

Akustische Wandadmittanzen sind zur Beschreibung der Feder-Masse-Dämpfer-Eigenschaften der Wände von Räumen komplexer Geometrie für die sich ausbreitenden Schallfelder sinnvoll. Globale Verfahren und Ergebnisse zur harmonischen, also bei einzelnen Frequenzen durchgeführten, Approximation von Wandadmittanzen in Innenräumen wurden bereits in [1, 2] vorgestellt.

Das Thema dieses Beitrages ist es, lineare Frequenzansätze für die Rekonstruktion der komplexen Wandadmittanzen zu nutzen.

Das zugrunde liegende Randwertproblem (RWP) für den akustischen Innenraum mit Wandadmittanzen Y besteht aus der bekannten Helmholtz-Gleichung und der Robin-Randbedingung, in der die Anregung über eine Rand-schnelle v_s und die Wandadmittanz vorkommen. Finite- und Rand-Elemente-Formulierungen (FEM, BEM) für diskretisierte Lösungen des RWP sind in [3] sehr gut zusammengefasst. Das mit FEM diskretisierte RWP

$$[\mathbf{K} - i\omega\mathbf{D}(\mathbf{y}(\omega)) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (1)$$

besitzt die Matrizen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , Massenmatrix \mathbf{M} und Dämpfungsmatrix \mathbf{D} der Größe $N \times N$. Letztere wird aus den Admittanzen am Rand gebildet, ihre normierte Form ist $y = \rho_0 c Y$ (c , ρ_0 und ω sind Schallgeschwindigkeit, Dichte und Kreisfrequenz).

Im Folgenden wird ein Pade-via-Lanczos-Algorithmus (PVL) für die um Freiheitsgrade reduzierte Lösung in einem Frequenzbereich aufgestellt, gefolgt von der Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems zur Abschätzung der Admittanzwerte mithilfe der Method-of-Moving-Asymptotes (MMA). Die Funktionsweise und Ergebnisse werden an einem zwei-dimensionalen Modell gezeigt (Abb. 1).

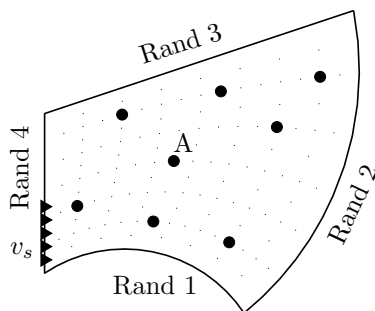


Abbildung 1: Modell gekrümmtes Viereck mit Knoten des FE-Gitters (Messpunkte fett), Anregung v_s und Admittanzrand 1 bis 4.

Vorwärtslösung mit PVL

Abb. 1 zeigt einen einfachen Innenraum mit vier über die jeweiligen Randstücke konstanten Admittanzen. Deren Frequenzverläufe sind in Abb. 2 dargestellt. Der PVL funktioniert nur mit frequenzunabhängigen Matrizen. Deshalb wird vorbereitend die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H} = [\mathbf{K} - i\omega\mathbf{D}(\mathbf{y}(\omega)) - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} \quad (2)$$

in eine Form mit neuen frequenzunabhängigen Matrizen \mathbf{K} , \mathbf{M} und \mathbf{D} gebracht, indem ein linearer Frequenzansatz $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \frac{\omega}{\omega_0}\mathbf{y}_1$ für die komplexen Admittanzen eingeführt wird (Abb. 2).

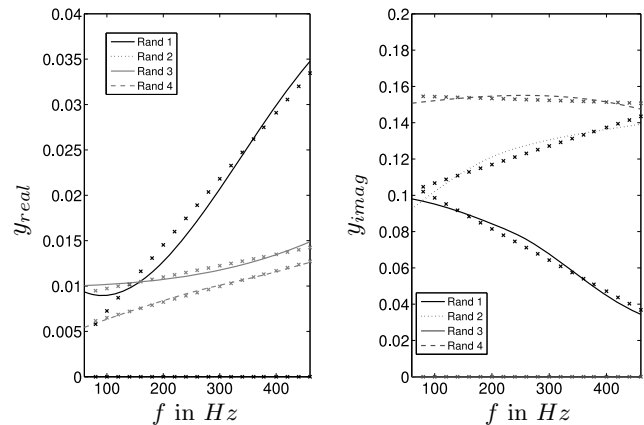


Abbildung 2: Frequenzverläufe der Randadmittanzen mit den linearen Näherungsverläufen.

Die Reduktion des Gleichungssystems (1) erfolgt in mehreren Schritten ([3, 4, 5]). Zunächst wird eine Frequenzverschiebung um ω_0 , der Entwicklungsfrequenz, vorgenommen, um auftretende Singularitäten im Sinne der Invertierbarkeit zu vermeiden. In einem zweiten Schritt wird Linearität bezüglich der Kreisfrequenz durch Überführung in den Zustandsraum erreicht. Beschränken sich die Nicht-Null-Einträge der Erregerseite \mathbf{f} auf N_s Werte \mathbf{f}_s und der interessierende Anteil des Lösungsvektors \mathbf{p} auf N_m Werte \mathbf{p}_m , kann die Lösung mit

$$\mathbf{p}_m = [\mathbf{L}^T(\mathbf{I} - \tilde{\omega}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{R}]\mathbf{f}_s \quad (3)$$

angegeben werden. Dabei ist der zu invertierende Teil noch von der Größe $2N \times 2N$. Es ist notwendig, diese Matrix mit einer LU-Zerlegung vorzukonditionieren, um dann die Inverse mit einem GMRES-Algorithmus zu approximieren. Stellt man die reduzierte Übertragungsmatrix \mathbf{H} nun auf der Basis von biorthogonalisierten Vektoren auf, den jeweils n Krylov-

Unterräumen V_n und W_n , erhält man

$$\mathbf{H}_n(\tilde{\omega}) = [\Delta\boldsymbol{\eta}_n]^T [\mathbf{I} - \tilde{\omega}\mathbf{T}_n]^{-1} \boldsymbol{\rho}_n. \quad (4)$$

\mathbf{H}_n ist von der Dimension $N_m \times N_s$, der zu invertierende Teil $n \times n$ mit $n \ll N$. Sämtliche Matrizen in Gl. (4) werden mit Hilfe von V_n und W_n gebildet.

Die Dimension von $\mathbf{p}_m = \mathbf{H}_n \mathbf{f}_s$ ist nun stark reduziert. Außerdem können so sehr schnell Schalldrucklösungen im gesamten Frequenzintervall ausgerechnet werden, die Mitnahme von ausreichend Krylov-Vektoren vorausgesetzt. Abb. 3 zeigt die Lösung mit den linearen Ansätzen und eine PVL-Lösung mit zu wenigen Krylov-Vektoren im Vergleich (Punkt A siehe Abb. 1).

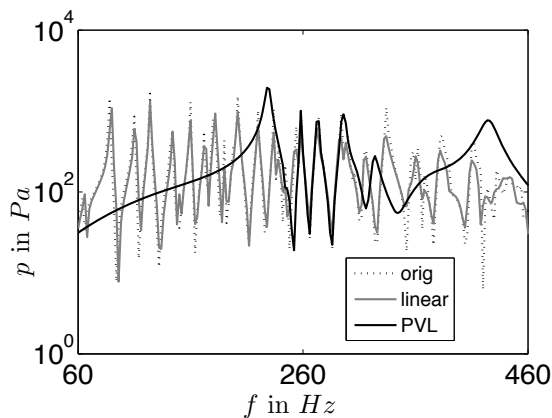


Abbildung 3: Schalldruckamplitude am Punkt A; mit originalen sowie linearisierten Frequenzverläufen der Randadmittanzen und approximierte PVL-Lösung (linearisierte Verläufe, $n = 20$ Krylov-Vektoren und Entwicklung bei $f = 260$ Hz).

Admittanzrekonstruktion mit MMA

Für die Identifizierung der Admittanzwerte \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 der linearen Ansätze — das sind bei den 4 Randstücken im Beispiel 16 reelle Unbekannte — wird ein Zielfunktional über das Fehlerquadratmittel der komplexen Schalldrücke an den Messpunkten aufgestellt. Dabei entscheidet nicht nur die Anzahl Messpunkte N_m über die Anzahl der Summanden in der Zielfunktion, sondern auch die Anzahl diskreter Frequenzen im Intervall, für die die Druckwerte in die Berechnung eingehen sollen.

Das Finden des Minimums der Zielfunktion ist eine nicht-lineare Optimierungsaufgabe, die in dieser Arbeit mit der MMA gelöst wird [6]. Das ist ein gradienten-basiertes Verfahren 1. Ordnung mit automatischer Schrittweitensteuerung. Der Gradient der Zielfunktion lässt sich mithilfe des adjungierten Operators schnell bestimmen. Die Lösung hängt methodisch bedingt stark von der Güte der Startwerte ab.

Abb. 4 zeigt die Konvergenz des Verfahrens für 3 verschiedene Anzahlen der Messpunkte. Die Summe der absoluten Fehler der Admittanzfreiwerte

$$f_{abs} = \sum_{i=1}^{16} |y_{orig_i} - y_{reco_i}| \quad (5)$$

wird über den Iterationsschritten dargestellt. Mit Schalldruck-Frequenzverläufen an nur 8 Messpunkten

konnten die Freiwerte \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 aller vier Ränder identifiziert werden. Wie zu erwarten war konnte keine Lösung bei zu wenig Information über die Druckverteilung erreicht werden ($N_m = 4$).

Wie auch im Beispiel weist der Matrix-PVL-Algorithmus bei zu vielen Outputs (p_m) generell Konvergenzprobleme auf. Das limitiert natürlich seine hier untersuchte Anwendung der Admittanzrekonstruktion. Denn infolge Messrauschen werden mehr Messpunkte notwendig sein, das schlecht konditionierte Problem regularisiert zu lösen. Diese Arbeit spiegelt den Zwischenstand der Entwicklung von Frequenzansätzen zur globalen Abschätzung von Wandadmittanzen wieder. Die Autoren werden folglich versuchen, das Konvergenzproblem mit der Benutzung eines Pade-via-Arnoldi-Algorithmusses zu beseitigen.

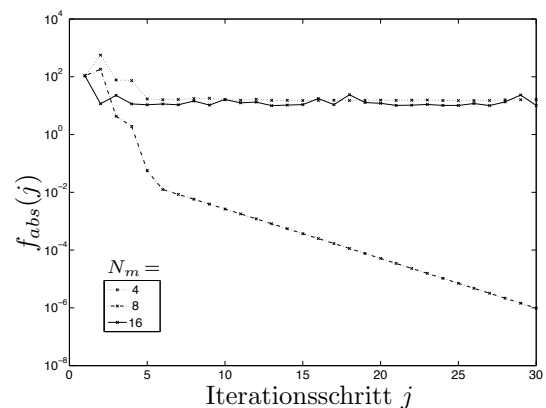


Abbildung 4: Konvergenz der MMA bei der Rekonstruktion der 16 reellen Admittanzfreiwerte.

Literatur

- [1] R. Anderssohn und S. Marburg. Non-Linear Approach to Approximate Acoustic Boundary Admittance in Cavities. In *Journal of Computational Acoustics*, 15(1):63–79, 2007.
- [2] R. Anderssohn, S. Marburg, H.-J. Hardtke. Globale Identifikation der Wandadmittanzen in Innenräumen mittels verschiedener Ansätze. *Fortschritte der Akustik, DAGA 2007*, Stuttgart, S. 55–56, 2007.
- [3] S. Marburg (Hg), B. Nolte (Hg). *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids — Finite and Boundary Element Methods*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [4] M. Malhotra und P. M. Pinsky. Efficient Computation of multi-frequency far-field solutions of the Helmholtz equation using Pade Approximation. In *Journal of Computational Acoustics*, 8:223–240, 2000.
- [5] J. Wartha. Reduktionsmethoden zur Berechnung von gekoppelten Struktur-Akustik-Systemen. Shaker-Verlag, 1999.
- [6] K. Svanberg. The method of moving asymptotes — a new method for structural optimization. In *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):359–373, 1987.