

## Dynamik wechselwirkender Blasen bei akustischer Kavitation

Adam Pluta, Ulrich Parlitz, Robert Mettin, Werner Lauterborn

Drittes Physikalisches Institut Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen, Deutschland, Email: pluta@physik3.gwdg.de

### Einleitung

Ein Modell der Blasendynamik bei akustischer Kavitation muss sowohl Anregungen durch das äußere Schallfeld und die daraus resultierenden primären Bjerkneskräfte, als auch die Wechselwirkungen benachbarter Blasen (Schallwechselwirkung, sekundäre Bjerkneskraft) beinhalten. Im Folgenden stellen wir ein System akustisch schwach angeregter, sphärischer Gasblasen vor, deren Radien linear oszillieren und die sich angetrieben durch die Bjerkneskräfte durch die Flüssigkeit bewegen.

### Schwingungsgleichungen

Die Radialschwingungen werden mit Hilfe linearisierter Keller-Miksis-Gleichungen [1] beschrieben. Die Linearisierungen erfolgt durch Entwicklung des Blasenradius' um den Ruheradius ( $R_i = R_{i0} + R'_i$ ) und führt auf ein System gekoppelter harmonischer Oszillatoren

$$\ddot{R}'_i + \delta\omega_0\dot{R}'_i + \omega_i^2 R'_i = -\frac{\tilde{p}}{\rho \cdot R_{i0}} - \sum_{j \neq i} \frac{R_{j0}^2 \cdot \ddot{R}'_j(t - \tau_{ij})}{R_{i0} \cdot d_{ij}} \quad (1)$$

mit Dämpfungskonstante  $\delta$ , Anregungsfrequenz  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ , Eigenfrequenzen  $\omega_i = 2\pi\nu_i$ , Dichte  $\rho$  und dem anregenden Schallfeld  $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ . Der letzte Term beschreibt eine zeitverzögerte Schallkopplung der Schwingungen des Systems. Die Schalllaufzeit zwischen zwei Blasen an den Orten  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{x}_j$  beträgt  $\tau_{ij} = d_{ij}/c$ , wobei  $d_{ij} = \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|$  der Abstand zwischen den Blasen ist und  $c$  die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit.

### Bewegungsgleichungen

Eine Blase  $j$  des Volumens  $V_j = 4\pi R_j^3/3$  in einer Flüssigkeit erfährt unter dem Druckgradienten  $\nabla\tilde{p}$  des äußeren Schallfeldes die sogenannte primäre Bjerkneskraft. Resultiert der Druckgradient aus der Radialoszillation einer benachbarten Blase  $i$ , so übt diese auf Blase  $j$  (zeitverzögert) die sekundäre Bjerkneskraft [2] aus

$$\mathbf{F}_{ij} = -V_j \nabla p_i(t - \tau_{ij}) = \frac{4\pi\rho}{d_{ij}^2} R_{i0}^2 R_{j0}^2 R'_j \ddot{R}'_i(t - \tau_{ij}) \mathbf{e}^{ij} \quad (2)$$

wobei  $\mathbf{e}^{ij} = (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)/\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i\|$ .

Als nächstes soll die freie Beweglichkeit der Blasen modelliert werden. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Blasenpositionen  $\mathbf{x}^i$  beschreiben die Kraftwirkung auf jede einzelne Blase

$$\mathbf{F}_M^i + \mathbf{F}_{Bp}^i + \mathbf{F}_{Bs}^i + \mathbf{F}_D^i = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Es wirken auf Blase  $i$  die Trägheitskraft  $\mathbf{F}_M^i$  (4) der virtuellen Masse, die primäre Bjerkneskraft  $\mathbf{F}_{Bp}^i$  (5), die

Summe der sekundären Bjerkneskräfte  $\mathbf{F}_{Bs}^i$  (6) und die Reibungskraft  $\mathbf{F}_D^i$  (7).

$$\mathbf{F}_M^i = \frac{\rho}{2} V^i \ddot{\mathbf{x}}^i \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{Bp}^i = -\nabla\tilde{p}(\mathbf{x}^i, t) V^i \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_{Bs}^i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_D^i = -4\pi\mu R_i \dot{\mathbf{x}}^i \quad (7)$$

mit der Viskosität  $\mu = 0.001\text{m}^2/\text{s}$ . Daraus folgt für die Bewegungsgleichung der Blase  $i$

$$\ddot{\mathbf{x}}^i = \left[ -4\pi\mu R_i \dot{\mathbf{x}}^i + \nabla\tilde{p}(\mathbf{x}^i, t) V^i - \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right] / \frac{\rho}{2} V^i \quad (8)$$

in der auf der rechten Seite der paarweise Blasenabstand  $d_{ij}$  nichtlinear in die sekundären Bjerkneskräfte eingeht.

### Numerische Lösung

Die Bewegungsgleichungen (8) lassen sich auf den Fall von  $N$  wechselwirkenden Blasen verallgemeinern und führen zu einem impliziten Delaydifferentialgleichungssystem der Form

$$M\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(\alpha(t, \mathbf{u}(t))), \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(\alpha(t, \mathbf{u}(t)))\right)$$

wobei  $M$  eine Matrix ist, die Funktionen  $\alpha_m(t, \mathbf{u}(t)) = t - \tau_m(t)$  zeitabhängige Zeitverzögerungen auf Grund der variablen Blasenabstände beschreiben und der Zustandsvektor  $\mathbf{u}$  sich aus den Radien und deren zeitlichen Ableitungen zusammensetzt. Um dieses Gleichungssystem mit der Integrationsroutine radar5 [3] lösen zu können, müssen die zeitverzögerten Ableitungen auf der rechten Seite eliminiert werden. Dies geschieht mit Hilfe von Hilfsvariablen  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}'(\alpha(t, \mathbf{u}(t)))$  durch die das DGL-System in die Standardform

$$M\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}(\alpha_m(t, \mathbf{y}(t)))\right)$$

überführt wird, das für zwei Blasen die Gestalt

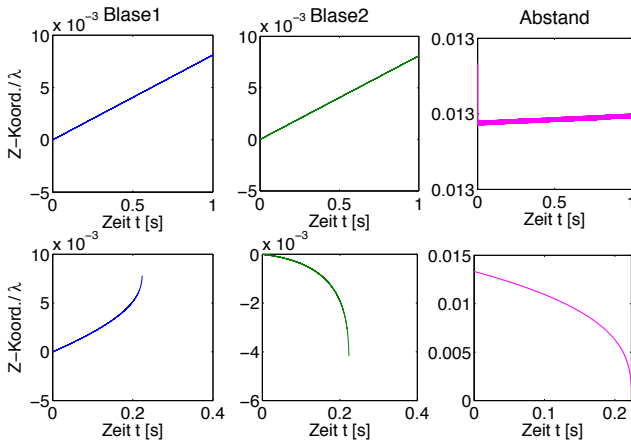
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(t) \\ \mathbf{z}'(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ -\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}\left(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(\alpha(t, \mathbf{u}(t))), \mathbf{z}(t), \mathbf{z}(\alpha(t, \mathbf{u}(t)))\right) \end{pmatrix}$$

annimmt, in der es mit radar5 lösbar ist.

## Ergebnisse

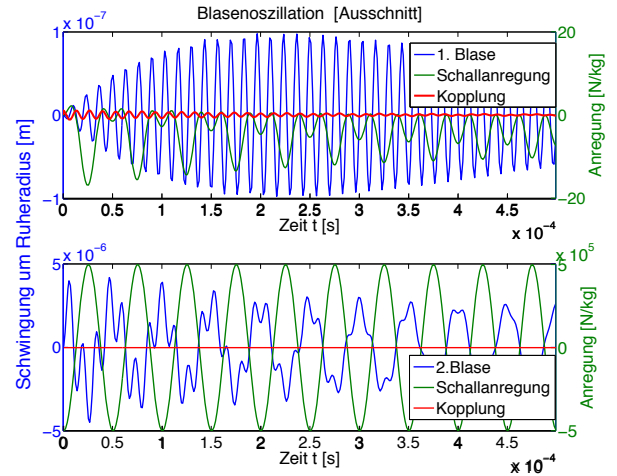
Wir brachten zunächst den Fall der Anregung durch eine laufende Welle  $\tilde{p} = P_0 \cos(2\pi\nu_0 t - 2\pi z/\lambda_0)$  mit der Amplitude  $P_0 = 10\text{kPa}$ , der Frequenz  $\nu_0 = 20\text{kHz}$  und der Wellenlänge  $\lambda_0 = 75\text{mm}$ . Die beiden Blasen haben Ruheradien von  $R_{10} = R_{20} = 0.04\text{mm}$  und Eigenfrequenzen von  $\nu_1 = \nu_2 = 75\text{kHz}$ . Sie werden zur Zeit  $t = 0$  an den Positionen  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 18.75)\text{mm}$  und  $\mathbf{x}_2 = (0, 0, 19.75)\text{mm}$  gestartet. Abb.(1) zeigt die resultierende Translationsbewegung anhand der (relativen)  $z$ -Koordinate ohne (obere Reihe) und mit (untere Reihe) sekundärer Bjerkneskraft, die hier zu einer Anziehung der Blasen führt.



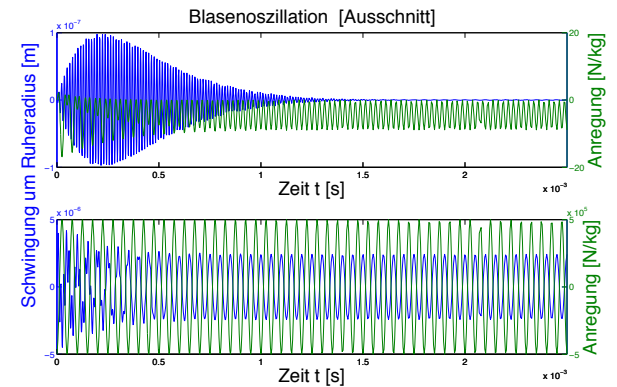
**Abbildung 1:**  $z$ -Koordinaten der beiden Blasen zum relativen Startpunkt und Blasenabstand in einer laufenden Welle. Oben: Ohne sek. Bjerkneskräfte  $F_{ij}$ , Unten: Mit  $F_{ij}$ .

Als zweites Beispiel wird die Anregung durch eine stehende Welle  $\tilde{p} = 2P_0 \cos(2\pi\nu_0 t)(\sin(2\pi z/\lambda_0))$  betrachtet, mit  $P_0 = 10\text{kPa}$ ,  $\nu_0 = 20\text{kHz}$  und  $\lambda_0 = 75\text{mm}$ . Die Blasenparameter lauten auch hier  $R_{10} = R_{20} = 0.04\text{mm}$  und  $\nu_1 = \nu_2 = 75\text{kHz}$ . Blase 1 wird in einem Druckknoten und Blase 2 im Abstand  $d = \lambda/4$  in einem Druckbauch gestartet ( $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, 0, \lambda_0/4)$ ). Abb.(2)(oben) zeigt, wie Blase 1 im Druckknoten des äußeren Schallfeldes zunächst nur durch das Schallfeld der Blase 2 zu Schwingungen angeregt wird, deren Frequenz mit den Einschwingungen beider Blasen übereinstimmt. Diese resonante Anregung führt zunächst zu einer Zunahme der Schwingungsamplitude von Blase 1, wie anhand von Abb.(3)(oben) zu erkennen ist. Danach nimmt die Amplitude jedoch wieder ab, da die treibende Blase nun nahezu eingeschwingen ist und somit nicht mehr mit Schallwellen der Eigenfrequenz  $\nu_1$  resonant treibt, sondern lediglich Schallwellen der deutlich niedrigeren Anregungsfrequenz  $\nu_0$  abstrahlt. Es treten hierbei anziehende und abstoßende Bjerkneskräfte auf die (asymptotisch) zu einer periodischen Bewegung der ersten Blase in  $z$ -Richtung um den Druckknoten führen (siehe Abb.(4)) während Blase 1 im Druckbauch verharret.

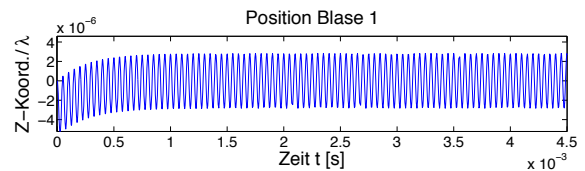
In zukünftigen Untersuchungen soll das Verhalten von Mehrblasensystemen untersucht und die Unterschiede zwischen Systemen mit und ohne Zeitverzögerung herausgearbeitet werden.



**Abbildung 2:** Einschwingverhalten der Blasen im Stehwellenfeld.



**Abbildung 3:** Entwicklung der Blasenoszillationen hin zum eingeschwingenen Zustand.



**Abbildung 4:** Positionszitterungen der ersten Blase um den Druckknoten der stehenden Welle.

## Literatur

- [1] Keller, J.B. and Miksis, M.: Bubble oscillations of large amplitude. J. Acoust. Soc. Am 68 (1980) 628-633; Parlitz, U. et al.: J. Acoust. Soc. Am. 88 (1990) 1061
- [2] Ida, M.: Alternative interpretation of the sign reversal of secondary Bjerknes force acting between two pulsating gas bubbles, Phys. Rev. E 67 (2003), 056617; Mettin, R. et al.: Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field, Phys. Rev. E (1997) 2924-2931
- [3] Guglielmi, N. and Hairer, E.: Users' Guide for the code RADAR5 - Version 2.1. (2005): Free software radar5, URL: <http://www.unige.ch/~hairer/software.html>