Experimentelle Bestimmung der Übertragungsmatrix von Mehr-Tor-Schalldämpfern

Bernhard Karl Bachner
86161 Augsburg, Deutschland, Email: bernhard.bachner@gmx.de

Einleitung

Zur Validation von Berechnungsmodellen für die Akustik von Abgasschalldämpfern besteht die Möglichkeit eines Vergleichs zwischen Simulation und Experiment anhand der so genannten Übertragungsmatrix des untersuchten Dämpfers. Die Grundlagen für die messtechnische Bestimmung dieser Matrix wurden von To und Doige [1] und in erweiterter Form von Munjal und Doige [2] beschrieben. Beiden Verfahren gemeinsam ist aber die Beschränkung auf Zwei-Tor-Elemente, das sind Schalldämpfer mit nur einem Ein- und einem Ausgang.

Anwendungen aus dem Automobilbereich führen häufig auf Probleme mit Schalldämpfern mit mehr als zwei Anschlüssen, den so genannten Mehr-Tor-Elementen. Im Folgenden wird ein Ansatz vorgestellt, der die Erweiterung experimenteller Methoden auf Mehr-Tor-Elemente gestattet.

Definition der Übertragungsmatrix

Die Übertragungsmatrix eines Mehr-Tor-Elements ist definiert als eine lineare Abbildung eines Vektors $\underline{\mathbf{p}}^{\oplus}(\omega)$ gebildet aus den Frequenzspektren der an allen Toren $i = 1, \ldots, n$ einfallenden Schalldruckwellen

$$\underline{\mathbf{p}}^{\oplus}(\omega) = \left\{\underline{p}_1^{\oplus}(\omega) \quad \underline{p}_2^{\oplus}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{p}_n^{\oplus}(\omega)\right\}^{\mathrm{T}} , \tag{1}$$

auf einen entsprechenden Vektor $\underline{\mathbf{p}}^{\ominus}(\omega)$ der Frequenzspektren der reflektierten Wellen

$$\underline{\mathbf{p}}^{\ominus}(\omega) = \left\{\underline{p}_1^{\ominus}(\omega) \quad \underline{p}_2^{\ominus}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{p}_n^{\ominus}(\omega)\right\}^{\mathrm{T}} . \tag{2}$$

Mit diesen beiden Vektoren erhält man für die Übertragungsmatrix $\mathbf{T}(\omega)$ den nachstehenden Zusammenhang:

$$\underline{\mathbf{p}}^{\ominus}(\omega) = \mathbf{T}(\omega)\underline{\mathbf{p}}^{\oplus}(\omega) . \tag{3}$$

Zur experimentellen Bestimmung der Übertragungsmatrix ist eine Menge von mindestens n linear unabhängigen Messergebnissen für die Wellenvektoren nötig. Darüberhinaus kann zur Minimierung von Messfehlern eine Überstimmung der Übertragungsmatrix vorgenommen werden, indem eine Anzahl von $m > n$ Messungen verarbeitet wird. Aus einer Matrixgleichung, welche die gleichzeitige Abbildung für die Wellenvektoren von $j = 1, \ldots, m$ Messungen beschreibt

$$\begin{aligned}\left[\underline{\mathbf{p}}_1^{\ominus}(\omega) \quad \underline{\mathbf{p}}_2^{\ominus}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{p}}_m^{\ominus}(\omega)\right] &= \\ \mathbf{T}(\omega)\left[\underline{\mathbf{p}}_1^{\oplus}(\omega) \quad \underline{\mathbf{p}}_2^{\oplus}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{p}}_m^{\oplus}(\omega)\right] &,\end{aligned} \tag{4}$$

kann die Übertragungsmatrix bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\omega) = &\left[\underline{\mathbf{p}}_1^{\ominus}(\omega) \quad \underline{\mathbf{p}}_2^{\ominus}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{p}}_m^{\ominus}(\omega)\right] \\ &\left[\underline{\mathbf{p}}_1^{\oplus}(\omega) \quad \underline{\mathbf{p}}_2^{\oplus}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{p}}_m^{\oplus}(\omega)\right]^{+}\end{aligned} \tag{5}$$

Darin bedeutet der Matrixoperator $[.]^{+}$ die Pseudoinverse nach Moore-Penrose [3] einer nichtquadratischen Matrix.

Bestimmung der Wellenvektoren

Die zur Ermittlung der Übertragungsmatrix benötigten Schalldruckwellen können messtechnisch mit Impedanzrohren, die an sämtliche Tore anzuschließen sind, bestimmt werden. An einem Impedanzrohr sind $k = 1, \ldots, l$ Mikrophone angebracht, deren Positionen entlang der Rohrachse durch die Koordinaten $x_k = x_1, \ldots, x_l$ gegeben sind. Für hinreichend kleine Frequenzen, kann das Schallfeld in einem Impedanzrohr als Überlagerung einer fortschreitenden $\underline{p}^{\oplus}$ und einer reflektierten Welle $\underline{p}^{\ominus}$ beschrieben werden.

Der Zusammenhang zwischen dem gesuchten Vektor der Schalldruckwellen am Tor i

$$\left\{\underline{p}_i^{\oplus}(\omega) \quad \underline{p}_i^{\ominus}(\omega)\right\}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

und dem Vektor der von den einzelnen Mikrophonen gemessenen Schalldrücke

$$\underline{\mathbf{p}}_i(\omega) = \left\{\underline{p}_{i,1}(\omega) \quad \underline{p}_{i,2}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{p}_{i,l}(\omega)\right\}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

entspricht der Lösung der 1-dimensionalen Helmholtzgleichung. Mit einer Matrix der Ausbreitungsfunktionen für die einfallende und die reflektierte Welle

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k^{\oplus}x_{i,1}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^{\ominus}x_{i,1}} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k^{\oplus}x_{i,2}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^{\ominus}x_{i,2}} \\ \vdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k^{\oplus}x_{i,l}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^{\ominus}x_{i,l}} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{A}_i^{\oplus} \quad \mathbf{A}_i^{\ominus}\right] , \tag{8}$$

worin $k^{\oplus}$ und $k^{\ominus}$ die zugehörigen Ausbreitungskoeffizienten bedeuten, wird nachstehender Zusammenhang für das Schallfeld im Impedanzrohr am Tor i gefunden

$$\underline{\mathbf{p}}_i(\omega) = \left[\mathbf{A}_i^{\oplus} \quad \mathbf{A}_i^{\ominus}\right] \begin{Bmatrix} \underline{p}_i^{\oplus}(\omega) \\ \underline{p}_i^{\ominus}(\omega) \end{Bmatrix} . \tag{9}$$

Um die gesuchten Frequenzspektren der Wellen zu erhalten, muss (9) invertiert werden. Voraussetzung dafür ist eine minimale Anzahl von $l = 2$ Mikrophonen am Impedanzrohr. Eine größere Anzahl an Mikrophonen führt auf eine Überbestimmung des Gleichungssystems für die Wellenzerlegung, die wiederum für die Minimierung von Messfehlern genutzt werden kann.

$$\begin{Bmatrix} \underline{p}_i^{\oplus}(\omega) \\ \underline{p}_i^{\ominus}(\omega) \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{A}_i^{\oplus} \quad \mathbf{A}_i^{\ominus}\right]^{+} \underline{\mathbf{p}}_i(\omega) \tag{10}$$

Die Pseudoinverse der Matrix der Ausbreitungsfunktionen $\mathbf{A}_i^{+}$ wird in zwei einzeilige Matrizen $\left(\mathbf{A}_i^{+}\right)^{\oplus}$ und

$\left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\ominus}$ zerlegt, die eine getrennte Bestimmung von einfallender und reflektierter Welle gestatten.

$$\underline{p}_i^{\oplus}(\omega) = \left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\oplus} \underline{\mathbf{p}}_i(\omega) \tag{11}$$

$$\underline{p}_i^{\ominus}(\omega) = \left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\ominus} \underline{\mathbf{p}}_i(\omega) \tag{12}$$

Diese beiden neuen Matrizen können als Funktionen der beiden Spalten der Matrix der Ausbreitungsfunktionen $\mathbf{A}_i^{\oplus}$ und $\mathbf{A}_i^{\ominus}$ ausgedrückt werden. Da diese beiden Matrixspalten im allgemeinen Fall linear unabhängig sind, findet man für die Pseudoinverse

$$\mathbf{A}_i^+ = \left(\mathbf{A}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{A}_i\right)^{-1} \mathbf{A}_i^{\mathrm{H}} \,, \tag{13}$$

wobei $\mathbf{A}_i^{\mathrm{H}}$ für die konjugiert transponierte Matrix steht.

Mit der folgenden Abkürzung für die Determinante des Matrixprodukts $\mathbf{A}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{A}_i$

$$\Delta = \left(\mathbf{A}_i^{\oplus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\oplus} \left(\mathbf{A}_i^{\ominus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\ominus} - \left(\mathbf{A}_i^{\ominus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\oplus} \left(\mathbf{A}_i^{\oplus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\ominus} \tag{14}$$

findet man schließlich

$$\left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\oplus} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\mathbf{A}_i^{\ominus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\ominus} \left(\mathbf{A}_i^{\oplus}\right)^{\mathrm{H}} - \left(\mathbf{A}_i^{\oplus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\ominus} \left(\mathbf{A}_i^{\ominus}\right)^{\mathrm{H}}\right] \tag{15}$$

und

$$\left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\ominus} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\mathbf{A}_i^{\oplus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\oplus} \left(\mathbf{A}_i^{\ominus}\right)^{\mathrm{H}} - \left(\mathbf{A}_i^{\ominus}\right)^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_i^{\oplus} \left(\mathbf{A}_i^{\oplus}\right)^{\mathrm{H}}\right] . \tag{16}$$

Bestimmung der Übertragungsmatrix

Durch die Trennung der Bestimmungsleichung für die Druckwellen ist es möglich, die Gleichungen (11) und (12) in die Definitionen der Wellenvektoren (1) und (2) einzusetzen. Für die Messung mit Index j erhält man somit für den Vektor der einfallenden Wellen

$$\underline{\mathbf{p}}_j^{\oplus}(\omega) = \Big[\left(\mathbf{A}_1^+\right)^{\oplus} \underline{\mathbf{p}}_{1,j}(\omega) \quad \left(\mathbf{A}_2^+\right)^{\oplus} \underline{\mathbf{p}}_{2,j}(\omega) \quad \cdots \quad \left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\oplus} \underline{\mathbf{p}}_{i,j}(\omega) \quad \cdots \quad \left(\mathbf{A}_n^+\right)^{\oplus} \underline{\mathbf{p}}_{n,j}(\omega)\Big]^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

und für den Vektor der reflektierten Wellen

$$\underline{\mathbf{p}}_j^{\ominus}(\omega) = \Big[\left(\mathbf{A}_1^+\right)^{\ominus} \underline{\mathbf{p}}_{1,j}(\omega) \quad \left(\mathbf{A}_2^+\right)^{\ominus} \underline{\mathbf{p}}_{2,j}(\omega) \quad \cdots \quad \left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\ominus} \underline{\mathbf{p}}_{i,j}(\omega) \quad \cdots \quad \left(\mathbf{A}_n^+\right)^{\ominus} \underline{\mathbf{p}}_{n,j}(\omega)\Big]^{\mathrm{T}} . \tag{18}$$

Durch die Einführung von Blockdiagonalmatrizen für die Matrizen der Ausbreitungsfunktionen von sämtlichen Impedanzrohren $i = 1, \ldots, n$

$$\left(\mathbf{A}^+\right)^{\ominus} = \mathrm{diag}\left(\left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\ominus}\right) \tag{19}$$

und

$$\left(\mathbf{A}^+\right)^{\oplus} = \mathrm{diag}\left(\left(\mathbf{A}_i^+\right)^{\oplus}\right) \tag{20}$$

können die Vektoren der gemessenen Schalldruckspektren $\underline{\mathbf{p}}_{i,j}(\omega)$ aller Impedanzrohre für die Messung j zu einem Vektor

$$\underline{\mathbf{p}}_j(\omega) = \left\{\underline{\mathbf{p}}_{1,j}(\omega) \quad \underline{\mathbf{p}}_{2,j}(\omega) \quad \cdots \quad \underline{\mathbf{p}}_{n,j}(\omega)\right\}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

zusammengefasst werden. Man erhält somit zwei Zusammenhänge zwischen den Wellenvektoren $\underline{\mathbf{p}}_j^{\oplus}(\omega)$ sowie $\underline{\mathbf{p}}_j^{\ominus}(\omega)$ und dem Vektor der gemessenen Schalldruckspektren $\underline{\mathbf{p}}_j(\omega)$ einer Messung j.

$$\underline{\mathbf{p}}_j^{\oplus}(\omega) = \left(\mathbf{A}^+\right)^{\oplus} \underline{\mathbf{p}}_j(\omega) \tag{22}$$

$$\underline{\mathbf{p}}_j^{\ominus}(\omega) = \left(\mathbf{A}^+\right)^{\ominus} \underline{\mathbf{p}}_j(\omega) \tag{23}$$

Um einen Mittelungsvorgang im Frequenzbereich in die Datenauswertung mit einschließen zu können, werden die Schalldruckspektren $\underline{\mathbf{p}}_j(\omega)$ durch gemessene Übertragungsfunktionen $\mathbf{H}_j(\omega)$ bezüglich eines Referenzkanals $\underline{p}_{j,ref}(\omega)$ ersetzt.

$$\underline{\mathbf{p}}_j^{\oplus}(\omega) = \left(\mathbf{A}^+\right)^{\oplus} \mathbf{H}_j(\omega)\underline{p}_{j,ref}(\omega) \tag{24}$$

$$\underline{\mathbf{p}}_j^{\ominus}(\omega) = \left(\mathbf{A}^+\right)^{\ominus} \mathbf{H}_j(\omega)\underline{p}_{j,ref}(\omega) \tag{25}$$

Setzt man nun diese beiden Gleichungen (24) und (25) in die Bestimmungsgleichung der Übertragungsmatrix (5) ein, so erhält man mit einer Matrix der Übertragungsfunktionen

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{H}_1(\omega) \quad \mathbf{H}_2(\omega) \quad \cdots \quad \mathbf{H}_m(\omega)\right] \tag{26}$$

und einer Diagonalmatrix der Spektren der Referenzkanäle

$$\mathbf{P}_{ref}(\omega) = \mathrm{diag}\left(\underline{p}_{j,ref}(\omega)\right) \tag{27}$$

zunächst folgenden Ausdruck für die gesuchte Übertragungsmatrix

$$\mathbf{T}(\omega) = \left(\mathbf{A}^+\right)^{\ominus} \mathbf{H}(\omega)\mathbf{P}_{ref}(\omega) \left[\left(\mathbf{A}^+\right)^{\oplus} \mathbf{H}(\omega)\mathbf{P}_{ref}(\omega)\right]^+ . \tag{28}$$

Die Datenauswertung von Versuchen hat gezeigt, dass die Diagonalmatrix der Referenzspektren $\mathbf{P}_{ref}(\omega)$ in (28) weggelassen werden kann, auch wenn bisher nur ein Beweis für den Fall $m = n$ gefunden wurde.

$$\mathbf{T}(\omega) = \left(\mathbf{A}^+\right)^{\ominus} \mathbf{H}(\omega) \left[\left(\mathbf{A}^+\right)^{\oplus} \mathbf{H}(\omega)\right]^+ \tag{29}$$

Literatur

[1] To, C. W. S. und Doige, A. G.: A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, J. Sound Vib. 62(2):207–233, 1979.

[2] Munjal, M. L. und Doige, A. G.: Theory of a two source location method for direct experimental evaluation of the four-pole parameters of an aeroacoustic element. J. Sound Vib. 141(2):323–333, 1990.

[3] Golub, G. und Van Loan, C.: Matrix Computations, John Hopkins U. P., Baltimore 1985, Kap. 6, S. 136–140