Vergleich der akustischen Finite-Elemente-Lösungen zu Eigenwertproblem und Quellproblem mit Raviart-Thomas- sowie Lagrange-Elementen

Stefanie Fuß[1], Luis M. Hervella-Nieto[2], Steffen Marburg[3]

[1] *Institut für Festkörpermechanik, TU Dresden, 01062 Dresden, Deutschland, Email: fuss@ifkm.mw.tu-dresden.de*

[2] *Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, 15707 A Coruña, Spain, Email: luisher@udc.es*

[3] *Institut für Festkörpermechanik, TU Dresden, 01062 Dresden, Deutschland, Email: marburg@ifkm.mw.tu-dresden.de*

Einleitung

Die Firma Microflown entwickelt Schallschnelle-Sensoren die die Messung der Schnelle in Fluiden ermöglichen. Weiterhin wird die Struktur in der numerischen Simulation für gewöhnlich über vektorielle Größen und nicht über den Druck beschrieben. Bei akustischen Problemen der Fluid-Struktur-Kopplung ist es u.a. aus diesen Gründen sinnvoll sowohl Fluid als auch Struktur in der schnellebasierten Helmholtzgleichung zu beschreiben. Dies hat den weiteren Vorteil, dass die Matrizen symmetrisch bleiben. Ein bekanntes Problem dabei stellt das Auftreten von Scheinmoden für das Fluid bei Verwendung der Standard-FE, wie z.B. Lagrange-Elemente, dar. Eine Möglichkeit das Auftreten dieser Scheinmoden zu umgehen ist es, Raviart-Thomas-Elemente für das Fluid zu verwenden.
Es soll hier die Funktionstüchtigkeit der Raviart-Thomas-Elemente im Vergleich zu Lagrange-Elementen anhand zweier Beispiele untersucht werden.

Druck- und schnellebasierte Helmholtzgleichung

Im Folgenden wird angenommen, dass Druck, Schnelle und Anregungsfunktion zeitharmonische Funktionen sind, $\tilde{a}(\boldsymbol{x},t) = \Re\{a(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\}$.
Daraus ergibt sich die starke Formulierung der Helmholtzgleichung für den Druck zu

$$-\Delta p(\boldsymbol{x}) - k^2 p(\boldsymbol{x}) = f_p(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{1}$$

und für die Schnelle zu

$$-\boldsymbol{\nabla}(div\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - k^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\boldsymbol{f}_u(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Der Druck p ist eine skalare Größe, während die Schnelle $\boldsymbol{u}$ eine vektorielle Größe ist. Mit der Beziehung (3) zwischen Druck und Schnelle

$$p = -\rho_0 c_0^2 div\boldsymbol{u} \tag{3}$$

ist es möglich, druck- und schnellbasierte Formulierung ineinander umzurechnen.
Die Umwandlung der starken Formulierung der Helmholtzgleichung in die schwache Formulierung und anschließende Diskretisierung liefert folgendes Gleichungssystem in der Matrixschreibweise für Druck und Schnelle

$$(\boldsymbol{K} - k^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \quad \text{bzw.} \quad (\boldsymbol{K} - k^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{K}$ entspricht hierbei der Steifigkeitsmatrix und $\boldsymbol{M}$ der Massenmatrix. Der Vektor $\boldsymbol{b}$ auf der rechten Seite enthählt die Anteile aus der Anregungsfunktion und der Randbedingung. Der Vektor $\boldsymbol{p}$ in der Druckformulierung enthält die Drücke in den einzelnen Knoten, während der Vektor $\boldsymbol{u}$ in der Schnelleformulierung die Normalenkomponenten der Schnelle in den einzelnen Knoten enthält.
Das betrachtete Randwertproblem besteht aus der Helmholtzgleichung und der Schnelle-Randbedingung. In der Druckformulierung lautet dieses

$$\begin{aligned} -\Delta p - k^2 p &= f_p && \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} &= \phi_1 && \text{auf} \quad \Gamma \end{aligned} \tag{5}$$

und in der Schnelleformulierung

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\nabla}(div\boldsymbol{u}) - k^2\boldsymbol{u} &= \frac{1}{\rho_0 c_o^2}\boldsymbol{f}_u && \text{in} \quad \Omega \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} &= \varphi_1 && \text{auf} \quad \Gamma\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Elementtypen

Zur numerischen Berechnung wurden zwei verschiedene Typen von Dreieckselementen verwendet, Lagrange-Elemente erster (P_1) und zweiter Ordnung (P_2) für die Druckformulierung sowie Raviart-Thomas-Elemente nullter (RT_0) und erster Ordnung (RT_1) für die Schnelleformulierung.
Da der Umgang mit Lagrange-Elementen in verschiedener Literatur, z.B. [1] und [5], ausführlich erläutert ist, wird im Folgenden nur auf die Raviart-Thomas-Elemente eingegangen.
Die RT-Elemente besitzen eine Normalenkomponente auf den Elementseiten, an denen sich auch die Elementknoten befinden. Das RT_1-Element besitzt einen zusätzlichen Knoten innerhalb des Elements. Während das RT_0-Element einen Freiheitsgrad pro Knoten aufweist, besitzt das RT_1 zwei Freiheitsgrade pro Knoten. In Abb. 1 sind

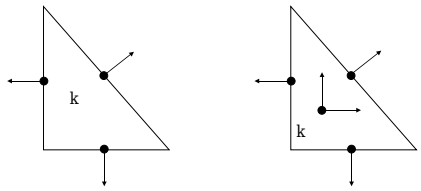

Abbildung 1: RT_0-Element (links) und RT_1-Element (rechts)

das Raviart-Thomas-Element nullter und erster Ordnung

gegenübergestellt. Nach [3] berechnen sich deren Formfunktionen allgemein aus

$$\boldsymbol{RT}_k(K) = [p_k(K)]^2 + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} [p_k(K)]\,. \tag{7}$$

Für die Berechnung der Formfunktionen müssen zwei Integrale ausgewertet werden,

$$\int_{\partial k} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, p_k\, ds \quad \text{und} \quad \int_k \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{p}_{k-1}\, d\boldsymbol{x}, \tag{8}$$

wobei für beide gilt, dass sie den Wert 1 im zugehörigen und den Wert 0 in den übrigen Knoten liefern müssen.

Beispiele

Eigenwertproblem

Es wurden die ersten zehn Eigenfrequenzen eines $3,4m$ langen Rohres numerisch ermittelt, für welches zuvor die exakten Eigenfrequenzen analytisch bestimmt wurden. Um das Konvergenzverhalten zu untersuchen, wurde der relative Fehler berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 für die erste Eigenfrequenz dargestellt.

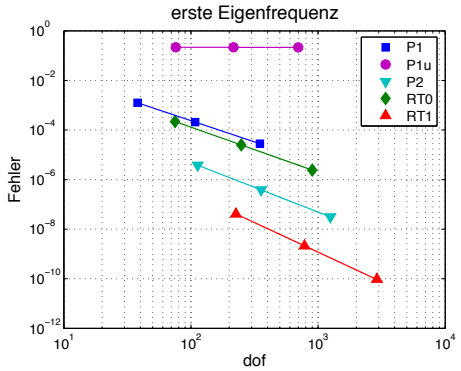

Abbildung 2: Konvergenzverhalten der Elemente

Zusätzlich zur Berechnung der P-Elemente in der Druckformulierung und der RT-Elemente in der Schnelleformulierung, wurde die Schnelleformulierung mit P_1-Elementen berechnet (in der Abbildung mit $P1u$ gekennzeichnet). Aufgrund der Vielzahl auftretender Scheinmoden ist es nicht möglich mit Sicherheit die tatsächliche erste Eigenfrequenz in der Ausgabe des Programms zu ermitteln, weiterhin ist keinerlei Konvergenzverhalten des Lagrange-Elements in der Schnelleformulierung festzustellen.
Besonderes Augenmerk sollte dem RT_1-Element gelten, welches in der Eigenfrequenzberechnung deutlich genauere Ergebnisse liefert als P_2.

Randwertproblem mit Quellterm

Bei diesem Beispiel wurde das Gebiet durch eine innere Quelle, einen Monopol, angeregt. Die Anregung wird über die Funktion auf der rechten Seite der Helmholtzgleichung realisiert und erfolgte über einen Dirac-Impuls. Die Anregungsfunktionen für Druck- und Schnelleformulierung sind [4]

$$f_p(\boldsymbol{x}) = \rho_0\, \omega\, \delta_{\boldsymbol{x}_0} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{f}_u(\boldsymbol{x}) = \rho_0 \frac{c_0^2}{\omega} \boldsymbol{\nabla} \delta_{\boldsymbol{x}_0}\,. \tag{9}$$

Als "exakte Lösung" wurde ein sehr feines Netz mit P_2-Elementen (Freiheitsgrad von 66049) berechnet. Der relative Fehler zu dieser Lösung wurde für jedes Netz und jeden Elementtyp in 16 Knoten, deren Koordinaten für alle Netze identisch sind, berechnet. In Abb. 3 ist das Konvergenzverhalten dargestellt. Um die Lösungen der

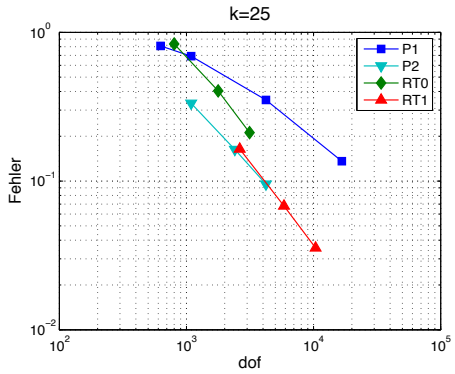

Abbildung 3: Konvergenz bei einer Wellenzahl von $k = 25$

RT-Elemente mit denen der P-Elemente zu vergleichen, wurden die Normalenkomponenten der Schnelle in den Druck umgerechnet. Durch diese Näherung entstand ein zusätzlicher Fehler für die Drucklösung mit RT, wodurch hier P_2 und RT_1 im Druck einen ähnlichen Fehler aufweisen.

Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, dass sich Raviart-Thomas-Elemente für die numerische Simulation des Fluides in der Schnelleformulierung wesentlich besser eignen als Lagrange-Elemente. Es treten keine Scheinmoden auf und mit Raviart-Thomas-Elementen können teilweise deutlich bessere Ergebnisse als mit Lagrange-Elementen bei gleicher Problemstellung erzielt werden.

Literatur

[1] Bermúdez, A.; Hervella-Nieto, L.M.; Prieto, A.: Métodos Matemáticos en Acústica. Universidade de Santiago de Compostela y Universidade de A Coruña, ebrero 2007

[2] Bermúdez, A.; Hervella-Nieto, L. M.; Rodríguez, R.: Finite element computation of three-dimensional elastoacoustic vibrations. Journal of Sound and Vibration, volume 219, pages 277-304, 1999

[3] Brezzi, F.; Fortin, M.: Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991

[4] Gamallo Ponte, P.: Contribución al estudio matemático de problemas de simulación elastoacústica y control activo del ruido. PhD. Thesis, Universidade de Santiago de Compostela, número 36, 2004

[5] Marburg, S.: Normal modes in external acoustics. Part I: Investigation of the one–dimensional duct problem. Acta Acustica united with Acustica, volume 91, number 6, pages 1063–1078, 2005