

# Ein Vergleich von IBEM und IFEM zur Ermittlung von Admittanzrandbedingungen

Steffen Marburg, Robert Anderssohn<sup>1</sup>, Hieram Neumann–Heyme

*Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland*

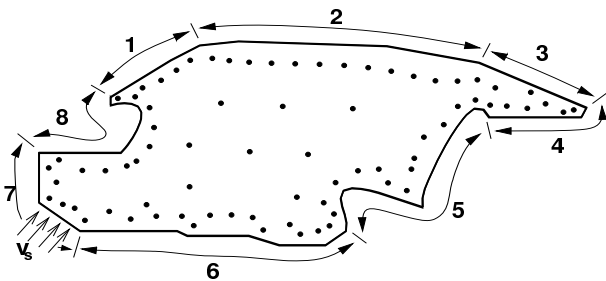
<sup>1</sup>*Email: robert.anderssohn@tu-dresden.de*

## Einleitung

Für die Schallausbreitung in Struktur–Fluid–gekoppelt Systemen ist die Berücksichtigung der Einflüsse der Dämpfung am Interface auf das Fluid unabdingbar. Ein Ansatz für eine einfache Beschreibung ist die komplexe, frequenzabhängige Wandadmittanz, der Kehrwert der akustischen Impedanz. Werte dieses Parameters in komplex aufgebauten Systemen sind meist unbekannt, weshalb solche Systeme oft mit schallhartem Interface gerechnet werden. Nimmt man einseitige Kopplung an, bei der die Struktur das eingeschlossene Fluid anregen kann aber nicht umgekehrt, kann eine Approximation der Dämpfungs– und Elastizitätseigenschaften des Randes mit einer lokalen Definition der Wandadmittanz  $Y$  aufgestellt werden. Das dafür zu Grunde liegende Randwertproblem (RWP) besteht aus der Helmholtz–Gleichung und der Robin–Randbedingung

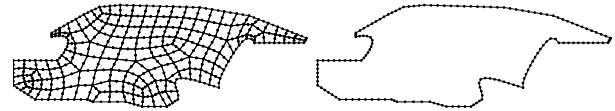
$$\Delta p(\vec{x}) + k^2 p(\vec{x}) = 0 \quad \vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (1)$$

$$p_{,n}(\vec{x}) = sk [v_s(\vec{x}) + Y(\vec{x})p(\vec{x})] \quad \vec{x} \in \Gamma, s = i\rho_0 c. \quad (2)$$



**Abbildung 1:** 2d–Modell eines Fahrzeuginnenraumes, mit Anregung über  $v_s$ ,  $N_m = 76$  Mikrofonpositionen und den acht Abschnitten konstanter Admittanzwerte.

Dieser Beitrag fokussiert die Identifikation der Admittanz entlang des gesamten Randes  $\Gamma$  von Schallräumen beliebiger Geometrie anhand ausgewählter Messungen des Schalldrucks  $p_m$  (Abb. 1). Neben diesen Druckmessungen soll auch die Anregung über eine Randschnelle  $v_s$  bekannt sein. Zwei inverse Ansätze werden untersucht. Sie basieren auf der Finite–Elemente–Methode (FEM) beziehungsweise der Rand–Elemente–Methode (REM) [1]. Die Anzahl der komplexen Freiwerte  $N_y$  entspricht der Anzahl Elementränder auf  $\Gamma$  (Abb. 2). In der Rekonstruktion der Admittanzfreiwerte wird angenommen, dass sie beliebige Werte annehmen können. Zunächst sind keine die Admittanzverläufe glättenden Annahmen einbezogen worden.



**Abbildung 2:** Die Anzahl Randelemente ist gleich der Anzahl Elementränder des FE–Netzes auf  $\Gamma$ ,  $N_y = 76$ .

## Inverse FEM

Einige Ideen zur Lösung des inversen Problems auf Basis der FEM wurden in [2, 3, 4] vorgestellt. Die FE–Formulierung des untersuchten RWP

$$[K - k^2 M - ikD(\mathbf{y})]\mathbf{p} = sk\mathbf{F}\mathbf{v}_s = \mathbf{b} \quad (3)$$

integriert die normierten Admittanzwerte  $y = \rho_0 c Y$  mit der Dämpfungsmatrix  $D$ . Ein Teil des Druckvektors  $\mathbf{p}$  sind die Messdrücke  $\mathbf{p}_m$ . Da sich Gl. (3) nicht explizit nach  $y$  auflösen lässt, wird das nichtlineare Problem

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}) = \|\check{\mathbf{p}}_m - \mathbf{p}_m(\mathbf{y})\|^2 \rightarrow \min! \quad (k = \text{konst}) \quad (4)$$

mit dem gradiente–basierten Optimierungsverfahren Limited–Memory–BFGS–Method gelöst. Das Verfahren benötigt die erste Ableitung, die zweite wird approximiert. Das Verfahren läuft stabil und erlaubt ungenaue Startwerte. Der Gradient wird mit Hilfe des adjungierten Operators berechnet, so dass pro Iterationsschritt neben Gl. (3) nur noch ein weiteres Gleichungssystem der selben Größe für Zielfunktion und Gradient gelöst werden muss.

## Inverse REM

Übliche inversen Randelemente–Formulierungen sind in [5] dargestellt. Zur Rekonstruktion von Admittanzen mit REM wurde beispielsweise in [6] veröffentlicht.

Diskretisiert man die Randintegralform der schwachen Formulierung über Kollokation, bekommt man mit dem Doppel– und dem Einfachschichtpotential  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{H}\mathbf{p}_b = \mathbf{G}\mathbf{v}_f \quad (5)$$

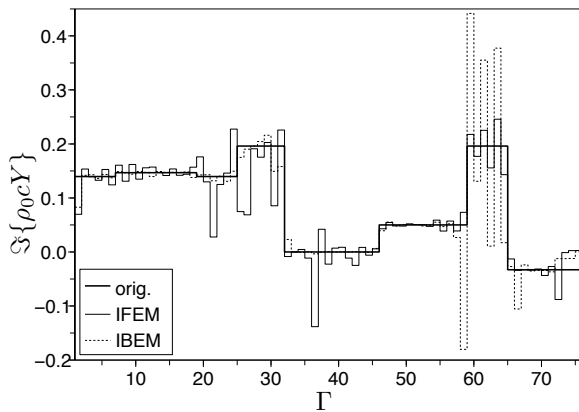
einen Zusammenhang zwischen Randschnelle  $\mathbf{v}_f$  und Randdruck  $\mathbf{p}_b$ . Mit Gl. (2) erhält man den Zusammenhang dieser Randgrößen zu  $v_s$  und der Wandadmittanz. Mit

$$\mathbf{p}_m = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{v}_f \quad (6)$$

lassen sich die Randschnelle und die Messdrücke  $\mathbf{p}_m$  im Gebiet verknüpfen. Gl. (6) ist im Allgemeinen ein

schlecht konditioniertes Gleichungssystem, dass über Tikhonov-Regularisierung gelöst wird. Dann berechnet man die Randdrücke  $p_b$  über Gl. (5). Zuletzt kann man über die Definition der Wandadmittanz diese an allen Knoten über  $y_i = (v_{f_i} - v_{s_i})/p_{b_i}$  finden. Um die inverse REM zur inversen FEM vergleichbar zu machen, wurden die rekonstruierten Admittanzwerte innerhalb eines Elementes gemittelt.

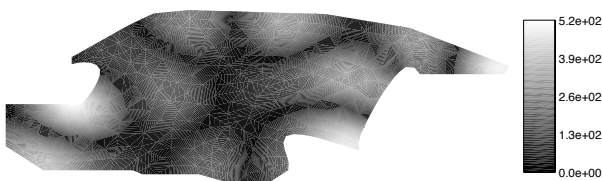
## Ergebnisse



**Abbildung 3:** Imaginärteil der mit der inversen FEM und REM rekonstruierten Wandadmittanzen im Uhrzeigersinn entlang des Randes, mit Abschnitt 1 beginnend (siehe Abb. 1).

Abb. 3 zeigt am Imaginärteil des Admittanzverlaufes bei  $470\text{ Hz}$  ein repräsentatives Rekonstruktionsergebnis. An Randstücken mit Randstrukturschnelle  $v_s = 0.0$  sind beide Verfahren gut. Im Bereich der Anregung im Fußbereich des Fahrers treten bei der IREM größere Abweichungen auf. Dafür zeigte sich, dass IREM wegen eingebauter Regularisierung stabiler bezüglich weniger Messpunkte und Messrauschen ist.

Druckfelder wie in Abb. 4 konnten mit beiden Verfahren



**Abbildung 4:** Schalldruckfeld bei  $470\text{ Hz}$ , dargestellt ist die Amplitude in  $Pa$ .

sehr genau rekonstruiert werden, da der Einfluss geringer Schwankungen bei den Admittanzwerten noch geringere Abweichungen im Druck erzeugen.

Zusammenfassend kann man Folgendes festhalten. Die inverse REM hat den Vorteil, dass ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, während man mit der inversen FE-Formulierung auf eine nichtlineare Optimierungsaufgabe stößt. Es konnte gezeigt werden, dass eine sinnvolle Verteilung der Messpunkte den notwendigen

Messaufwand gering halten kann.

In anschließenden Arbeiten wird eine Vorkonditionierung der mit Rauschen belegten Messergebnisse untersucht werden. Die Autoren nehmen desweiteren an, dass zusätzlich zu dem Vorteil der inversen FEM, der fehlenden Sensibilität auf  $v_s \neq 0$ , der Einbau einer Regularisierung in das nichtlineare Verfahren stabilere Lösungen erzeugen wird. Glättend wirkende Restriktionen für die Wandadmittanz bezüglich ihres Randverlaufes in der Zielfunktion sind für den konkreten Anwendungsfall anzupassen und können damit auch die Anzahl Unbekannter verringern. Bei der inversen FEM ist es auch denkbar, in der Randbedingungsformulierung die lokale Definition der Wandadmittanz auf eine beinahe lokale Definition zu erweitern, um Kopplungseffekte über die Struktur besser nachbilden zu können.

Ausblickend soll bemerkt werden, dass für realistische Anwendungen eine drei-dimensionale Formulierung geplant ist.

## Literatur

- [1] S. Marburg (Hg), B. Nolte (Hg). Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids — Finite and Boundary Element Methods. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] R. Anderssohn, S. Marburg, H.-J. Hardtke, C. Großmann. Zu einem nicht-linearen, FE-basierten Lösungsansatz zur Rekonstruktion gedämpfter Schallfelder von Innenräumen. *Fortschritte der Akustik, DAGA 2006*, Braunschweig, S. 391–392, 2006.
- [3] R. Anderssohn, S. Marburg, H.-J. Hardtke. Globale Identifikation der Wandadmittanzen in Innenräumen mittels verschiedener Ansätze. *Fortschritte der Akustik, DAGA 2007*, Stuttgart, S. 55–56, 2007.
- [4] R. Anderssohn, S. Marburg. Non-Linear Approach to Approximate Acoustic Boundary Admittance in Cavities. *Journal of Computational Acoustics*, 15(1):63–79, 2007.
- [5] R. Visser. *A Boundary Element Approach to Acoustic Radiation and Source Identification*. Dissertation, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2004.
- [6] S. Marburg, H.-J. Hardtke. A study on the acoustic boundary admittance. Determination, results and consequences. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23:737–744, 1999.