

Simulation der Schallausbreitung am Beispiel einer Blockflöte

Stefanie Fuß¹, Steffen Marburg¹

¹ Institut für Festkörpermechanik, TU Dresden, 01062 Dresden, Deutschland, Email: fuss@ifkm.mw.tu-dresden.de

Einleitung

Beim Spielen einer Blockflöte wird die Luftsäule im Inneren des Instruments durch den eingebrachten Luftstrom zum Schwingen angeregt. Der Spieler ist in der Lage die Tonfrequenz durch Variation des Anblasdrucks zu beeinflussen und damit Feinabstimmungen im Klang zu erreichen. Die Schallausbreitung in rotationsbehafteten Strömungen wird durch die Galbrungleichung beschrieben. Wir präsentieren den Einfluss der Strömung auf die Eigenfrequenzen.

Weiterhin ist es möglich mit Hilfe von Quadrupolquellen im Bereich des Labiums einer Blockflöte den Anregungsmechanismus für eine Schallausbreitung in der Flöte und um sie herum abzubilden. Die numerischen Ergebnisse werden durch Messungen an der Blockflöte validiert.

Das Fluid innerhalb und im Nahfeld der Blockflöte wird durch finite Elemente (FE) beschrieben, während infinite Elemente (IE) genutzt werden, um das Verhalten im Fernfeld abzubilden. Die Sommerfeld-Abstrahlbedingung gewährleistet hierbei, dass in großer Entfernung vom abstrahlenden Körper nur nach außen propagierende Komponenten existieren. Als finite Elemente werden Lagrange Tetraederelemente zweiter Ordnung und als infinite Elemente komplex konjugierte Astley-Leis Elemente [1] verwendet.

Quellproblem

Das betrachtete Randwertproblem setzt sich aus der Helmholtzgleichung, der Neumann-Randbedingung für den Flötenrand sowie der Sommerfeld-Abstrahlbedingung zusammen. Die Matrixformulierung dieses Randwertproblems lautet

$$(\mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

wobei sich der Druck \mathbf{p} aus komplementärem, \mathbf{p}^c , und partikulärem Druck, \mathbf{p}^p , zusammensetzt. Damit ergibt sich die rechte Seite zu

$$\mathbf{b} = -i\rho_0\omega\mathbf{F}\mathbf{v}_a^p + (\mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p}^p. \quad (2)$$

\mathbf{F} ist hierbei die Randmassenmatrix, \mathbf{v}_a^p und \mathbf{p}^p sind die Partikulärlösungen von Schnelle und Druck, die sich nach den jeweils verwendeten Quelltermen ergeben. Im hier betrachteten Fall werden entsprechend der Lighthill Analogie Quadrupolquellen verwendet, um den Anregungsmechanismus abzubilden.

Zur Verifizierung der numerischen Ergebnisse erfolgen Messungen an der Blockflöte, bei denen der Druck als zeitabhängige Größe in fünf verschiedenen Positionen mithilfe von Mikrofonen gemessen werden kann.

Im Anschluß an die Messungen wird ein Optimierungsprozess für die numerische Berechnung durchgeführt, um Position, Stärke und Orientierung der Quadrupole zu bestimmen. Mithilfe dieses Optimierungsprozesses konnten gute Übereinstimmungen zwischen Messung und Rechnung erzielt werden.

Modalanalyse ohne Strömung

Für die Modalanalyse des ruhenden Fluids in und um der Blockflöte wird das Randwertproblem, wie in Gleichung (1) beschrieben, verwendet. Die Flöte selbst wird als schallhart angesehen, womit sich der Vektor \mathbf{b} auf der rechten Seite zu Null ergibt.

Die daraus resultierende Zustandsraumbeschreibung des Eigenwertproblems lautet [3]

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

mit $\Phi = \lambda\Psi$ und $\lambda = -ik$.

Das dreidimensionale FE-Fluidmodell der Blockflöte wird in Ansys 11.0 erstellt und in einem, am Institut für Festkörpermechanik der TU Dresden entwickelten, Fortran90 Code eingelesen. In diesem Programm werden die infiniten Elemente hinzugefügt und die Modalanalyse durchgeführt.

Die Modalanalyse wurde für alle spielbaren Töne, ausgeschlossen derer mit halbgeöffneten Tonlöchern, durchgeführt. Abbildung 1 zeigt den Grundton und ersten Oberton der Note f'' .

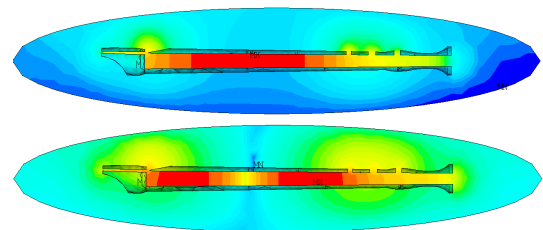


Abbildung 1: Grundton (oben) und erster Oberton (unten) für f'' .

Bei der untersuchten Flöte handelt es sich um eine Sopranblockflöte mit deutscher Griffweise, Stimmung auf 442 Hz. Um Aussagen über das Konvergenzverhalten treffen zu können, wurden die berechneten Eigenfrequenzen mit den entsprechenden Werten aus der MIDI-Tabelle verglichen. Der Ton f'' beträgt laut MIDI-Tabelle 701,63 Hz. In Abbildung 2 ist das Konvergenzverhalten des Tones f'' dargestellt. Auf den ersten Blick weisen die numerischen Ergebnisse ein gutes Konvergenzverhalten

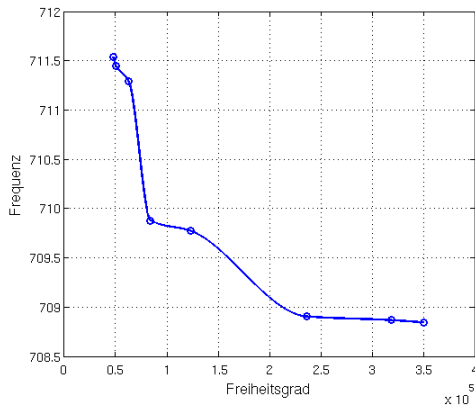


Abbildung 2: Konvergenz von f'' .

auf, jedoch beträgt die Differenz zwischen berechnetem und laut MIDI-Tabelle gefordertem Wert auch bei dem feinsten Netz für diesen Ton noch ca. 7 Hz. In der Musik ist diese Abweichung zu groß. Wir vermuten, dass ein Grund hierfür in der Vernachlässigung des durch den Musiker erzeugten Volumenstroms liegt. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Volumenstrom untersucht.

Modalanalyse mit Strömung

In diesem Abschnitt wird die Schallausbreitung von einem strömenden Fluid untersucht. Vorerst erfolgen diese Untersuchungen an Innenraumproblemen.

Zur Beschreibung des Problems wird die Galbrungleichung verwendet [2, 4],

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p - \int_{\Omega} \nabla p^* \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \cdot \nabla p \\
 & - \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) - \omega^2 \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w} \\
 & - i\omega \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) + i\omega \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w} \\
 & + \int_{\Gamma} \mathbf{w}^* \cdot \left[\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right] - \int_{\Gamma} p^* (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um eine gemischte Formulierung mit Druck p und Verschiebung \mathbf{w} , \mathbf{v}_0 repräsentiert die Strömungsgeschwindigkeit.

Als finite Elemente werden Tetraeder MINI Elemente verwendet. Diese haben je einen Druckfreiheitsgrad pro Knoten sowie jeweils einen Verschiebungsfreiheitsgrad in x-, y- und z-Richtung in jedem Knoten und zusätzlich einen im Schwerpunkt des Elements. Folglich besitzt das 3D MINI Element insgesamt einen Freiheitsgrad von 19.

Der Einfluss der Strömung auf die Eigenfrequenzen wird anhand eines dreidimensionalen Rohrs mit den Abmessungen $l = 3,4\text{ m}$, $b = h = 0,2\text{ m}$ untersucht. Die Strömung wurde über den Rohrquerschnitt als konstant angenommen. Für dieses Beispiel kann man eine eindimensionale analytische Lösung ermitteln

$$f_n = \frac{c_0 n}{2l} (1 - Ma^2) \quad \text{mit} \quad Ma = \frac{v_0}{c_0}. \quad (5)$$

In Abbildung 3 sind die ersten drei Frequenzen des Rohres in Abhängigkeit von der Machzahl (Ma) dargestellt. Die numerischen Berechnungen unter Verwendung der

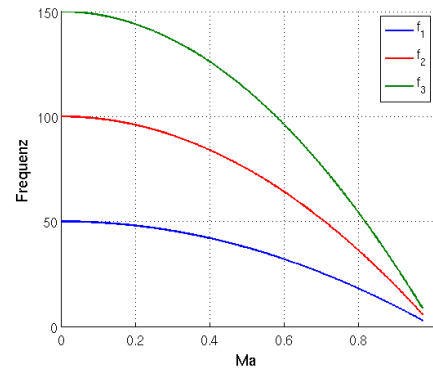


Abbildung 3: 1., 2. und 3. Eigenfrequenz über Machzahl.

Galbrungleichung bestätigen diese Abnahme der Frequenzen bei steigender Machzahl. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse dieser Berechnungen denen mittels der Helmholtzgleichung erhaltenen gegenübergestellt.

Tabelle 1: Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von Machzahl.

| Helmholtz | $v_{0z} = 0 \frac{m}{s}$ Ma=0 | $v_{0z} = 10 \frac{m}{s}$ Ma=0.02941 | $v_{0z} = 100 \frac{m}{s}$ Ma=0.29412 |
|-----------|----------------------------------|---|--|
| 50.00003 | 50.02247 | 49.96569 | 45.66757 |
| 100.00093 | 100.16144 | 100.02416 | 91.28340 |
| 150.00674 | 150.56087 | 150.34645 | 136.78154 |

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel konnte gezeigt werden, dass es möglich ist den Anregungsmechanismus in und um einer Blockflöte mithilfe von Quadrupolquellen abzubilden.

Weiterhin wurden Modalanalysen sowohl am ruhenden als auch am strömenden Fluid durchgeführt. Dabei konnte gezeigt werden, dass eine Strömung die Eigenfrequenzen reduzieren kann. In einem nächsten Schritt wird daher versucht, ein rotationsbehaftetes Strömungsprofil in die Flöte einzubringen und dessen Einfluss auf die Eigenfrequenzen zu untersuchen.

Literatur

- [1] Astley, R. J.: Mapped spheroidal elements for unbounded wave problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 41 (1998), S. 1235–1254
- [2] Gabard, G.; Treysède, F.; Ben Tahar M.: A numerical method for vibro-acoustic problems with sheared mean flows. *J. Sound Vib.* 272 (2004), S. 991–1011
- [3] Ruge, P.: Eigenvalues of damped structures: Vector iteration in the original space of DOF. *Computational Mechanics* 22 (1998), S. 167–173
- [4] Treysède, F.; Ben Tahar M.: Comparison of a finite element model with a multiple-scales solution for sound propagation in varying ducts with swirling flows. *J. Acoust. Soc. Am.* 115 (2004), S. 2716–2730