Berechnung der Schalldämmung: einfache Näherungen und iterative Bestimmung für unendliche homogene Platten

Waldemar Maysenhölder, Yohko Aoki
Fraunhofer-Institut für Bauphysik, 70569 Stuttgart, E-Mail: maysenhoelder@ibp.fraunhofer.de

Die Schalldämmung einer unendlichen homogenen dünnen Platte bei Anregung durch eine ebene Welle ist – auch bei Anisotropie und Vorspannung – analytisch exakt bekannt. Zwischen der exakten Lösung und bestimmten Näherungen, z. B. der "blocked pressure"-Näherung, die die Fluidlast ("fluid loading") vernachlässigt, existieren bemerkenswerte einfache Beziehungen, die allerdings beim praktisch interessanten Fall endlicher Platten nicht anwendbar sind. Versucht man, die "blocked pressure"-Näherung für endliche Platten mittels iterativer Methoden, bei denen Luft- und Körperschallberechnungen nacheinander erfolgen, zu verbessern, können Konvergenzprobleme auftreten. Dies lässt sich bereits im einfachen Fall unendlicher Platten veranschaulichen.

Aufgabenstellung und exakte Lösung

Eine unendliche homogene dünne Platte trennt zwei Fluide I und III mit den Dichten ρ_I und ρ_III und den Schallgeschwindigkeiten c_I und c_III. Durch eine ebene Welle im Fluid I, die sich unter dem Winkel Θ_I zur Plattennormalen ausbreitet, wird die Platte zu Biegewellen angeregt, die zur Abstrahlung einer reflektierten und einer in Θ_III-Richtung transmittierten Welle führen. Die Schallausbreitung in den Fluiden sei verlustfrei, streifender Schalleinfall ($\Theta_\mathrm{I} = 90°$) und Totalreflexion (Θ_III komplex) seien ausgeschlossen. Die exakte Lösung für den Transmissionskoeffizienten T lautet

$$T = \frac{2}{1 + g + g Y_\mathrm{a}^{-1}} \quad \text{mit} \quad g = \frac{\rho_\mathrm{I} c_\mathrm{I} \cos\Theta_\mathrm{III}}{\rho_\mathrm{III} c_\mathrm{III} \cos\Theta_\mathrm{I}}, \qquad (1)$$

wobei $Y_\mathrm{a} = |Y_\mathrm{a}| e^{\mathrm{i}\varphi_\mathrm{a}}$ eine mit $\rho_\mathrm{I} c_\mathrm{I}$ normierte Admittanz der Platte im Vakuum bezeichnet ($\cos\varphi_\mathrm{a} \geq 0$ für passives Material). Mit entsprechendem Y_a gilt diese Lösung für beliebig anisotrope und auch vorgespannte Platten oder Membranen [1]. Für den Reflexionskoeffizienten R ergibt sich $R = 1 - gT$. Die energetischen Größen Reflexionsgrad $r = |R|^2$, Transmissionsgrad $\tau = g|T|^2$ und Dissipationsgrad δ sind durch die Energieerhaltungsgleichung $r + \delta + \tau = 1$ miteinander verknüpft.

Einfache Näherungen

Die einfachste Näherung besteht darin, die Platte zu ignorieren (Index "np" für "no plate"):

$$T_\mathrm{np} = \frac{2}{1+g}, \qquad \tau_\mathrm{np} = \frac{4}{(1+g)(1+g^{-1})}. \qquad (2)$$

Bei gleichen Fluiden ($g = 1$) ist diese "np"-Näherung trivial (totale Transmission).

Eine weitere einfache Näherung erhält man dadurch, dass man zunächst die anregende Druckverteilung auf der Platte berechnet, wobei die Platte als starr und unbeweglich angenommen wird, dann aus diesem "blocked pressure" (Index "bp") über die Admittanz Y_a die Plattenbewegung bestimmt und schließlich aus dieser Plattenbewegung die Amplituden der abgestrahlten Wellen gewinnt:

$$T_\mathrm{bp} = \frac{2Y_\mathrm{a}}{g}, \qquad \tau_\mathrm{bp} = \frac{4}{g}|Y_\mathrm{a}|^2. \qquad (3)$$

Statt der Energieerhaltungsgleichung gilt

$$r_\mathrm{bp} + \delta_\mathrm{bp} - g\,\tau_\mathrm{bp} = 1. \qquad (4)$$

Berücksichtigt man in der Admittanz Y_a nur den Beitrag der Plattenmasse m pro Flächeneinheit, liefert die "blocked pressure"-Näherung (3) für reelles m das Schalldämm-Maß

$$R_\mathrm{TL,bp}^\mathrm{Massegesetz} = 20\lg\left(\frac{m\omega\cos\Theta_\mathrm{I}}{2\rho_\mathrm{I} c_\mathrm{I}\sqrt{g}}\right) \quad \left(Y_\mathrm{a}^\mathrm{m} = \frac{\mathrm{i}\rho_\mathrm{I} c_\mathrm{I}}{m\omega\cos\Theta_\mathrm{I}}\right), \qquad (5)$$

das für $g = 1$ in die bekannte Näherung fürs Massegesetz übergeht. (Falls $g = 1$ und $R_\mathrm{TL,bp}^\mathrm{Massegesetz} > 16.4$ dB, ist die Abweichung vom exakten Wert kleiner als 0.1 dB.)

Beziehungen

Die exakte Lösung lässt sich durch obige Näherungen ausdrücken:

$$T^{-1} = T_\mathrm{bp}^{-1} + T_\mathrm{np}^{-1}, \qquad (6)$$

$$\tau^{-1} = \tau_\mathrm{bp}^{-1} + 2\cos\varphi_\mathrm{a}\sqrt{\tau_\mathrm{bp}^{-1}\tau_\mathrm{np}^{-1}} + \tau_\mathrm{np}^{-1}. \qquad (7)$$

Ohne Dämpfung in der Platte ($\cos\varphi_\mathrm{a} = 0$) sind die exakten Größen gleich dem halben harmonischen Mittel der Näherungen "bp" und "np". Aus Gl. (7) folgt außerdem, dass beide Näherungen obere Grenzen für den exakten Transmissionsgrad und damit untere Grenzen fürs exakte Schalldämm-Maß darstellen: $\tau < \tau_\mathrm{bp}$, $\tau \leq \tau_\mathrm{np} \leq 1$.
Mit Gl. (2) und δ_bp aus Gl. (4) statt $\cos\varphi_\mathrm{a}$ wird aus Gl. (7)

$$\tau = \frac{4g\,\tau_\mathrm{bp}}{4g + 2(1+g)\delta_\mathrm{bp} + (1+g)^2\tau_\mathrm{bp}}. \qquad (8)$$

Ähnliche Formeln erhält man für δ und r. Für $g = 1$ gilt

$$\tau = \frac{\tau_\mathrm{bp}}{1+\delta_\mathrm{bp}+\tau_\mathrm{bp}}, \quad \delta = \frac{\delta_\mathrm{bp}}{1+\delta_\mathrm{bp}+\tau_\mathrm{bp}}, \quad r = \frac{1}{1+\delta_\mathrm{bp}+\tau_\mathrm{bp}}, \qquad (9)$$

was sich mit $\delta_\mathrm{bp} = 0$ und Gl. (4) weiter zu

$$r = \frac{1}{r_{bp}}, \qquad \delta = 0, \qquad \tau = \frac{\tau_{bp}}{r_{bp}} \tag{10}$$

vereinfacht.

Da mit Gl. (1) die exakte Lösung in einfacher Form vorliegt, sind obige Beziehungen vielleicht bemerkenswert, aber eigentlich überflüssig. Interessant wäre es aber, wenn sie sich auf Platten verallgemeinern ließen, bei denen keine einfache oder gar keine exakte analytische Lösung bekannt ist. In der Tat ist τ_{bp} auch bei dicken, symmetrisch aufgebauten unendlichen Platten eine obere Grenze für das exakte τ. Weil jedoch zwei Admittanzen eingehen (eine für die symmetrischen Plattenwellen, die andere für die antisymmetrischen), reichen beispielsweise die drei positiven Größen r_{bp}, δ_{bp} und τ_{bp} zur Beschreibung der Platteneigenschaften in der Regel nicht aus. Bei endlichen dünnen Platten aber, die einen vergleichsweise hohen Rechenaufwand verursachen, ist τ_{bp} im Allgemeinen keine untere Grenze.

Iterative Bestimmung

Es liegt nahe, die "bp"-Näherung zu verbessern, indem der von den abgestrahlten Wellen auf die Platte ausgeübte Druck berechnet und zum "blocked pressure" addiert wird. Der modifizierte "blocked pressure" führt zu modifizierter Plattenbewegung und Abstrahlung, die wiederum zu einer veränderten Druckanregung der Platte Anlass gibt etc. Auf diese Weise entsteht die Iterationsvorschrift

$$T^{(n)} = \widetilde{Y}_a \left[\frac{2}{1+g} - T^{(n-1)} \right], \quad \widetilde{Y}_a = \left(1 + g^{-1}\right) Y_a, \tag{11}$$

die für $n \to \infty$ zum exakten T führt, wenn der spektrale Radius der Iterations"matrix" $\widetilde{Y}_a$, d. h. $\left|\widetilde{Y}_a\right|$, kleiner als eins ist [2]. Daraus folgt, dass – bei gleichen Fluiden – die Iteration (11) nicht konvergiert, wenn $\tau_{bp} \geq 1$ oder $\tau \geq 0.25$, also das exakte Schalldämm-Maß kleiner als ungefähr 6 dB ist. Dies ist bei tiefen Frequenzen und – falls die Dämpfung nicht hoch genug ist – beim Koinzidenzminimum der Fall (Abb. 1).

Wenn die Vorschrift (11) divergiert, kann man zu ihrer "Rückwärts-Version" übergehen, d. h. nach $T^{(n-1)}$ auflösen und $n \to -\infty$ laufen lassen. Wegen $\left|\widetilde{Y}_a\right|^{-1} < 1$ ist Konvergenz garantiert. Diese Möglichkeit ist für endliche Platten allerdings uninteressant, weil der spektrale Radius von mehr als einem Eigenwert bestimmt wird und nach der Inversion der Iterationsmatrix nicht einfach seinen Kehrwert annimmt.

Dagegen lässt sich mit der Splitting-Methode [2] für alle $\widetilde{Y}_a$ Konvergenz erzwingen. Die Iteration

$$T^{(n)} = \frac{1}{\widetilde{Y}_a^{-1} + Z_{aux}} \left[\frac{2}{1+g} - \left(1 - Z_{aux}\right) T^{(n-1)} \right] \tag{12}$$

konvergiert für jede Hilfs"matrix" $Z_{aux} > 0.5$. Optimal ist die Wahl $Z_{aux} = 1$, die in einem Schritt zur exakten Lösung (1) führt. Die positive Hilfs"matrix" Z_{aux} in der Summe $\widetilde{Y}_a^{-1} + Z_{aux}$ wirkt als zusätzliche Dämpfung, deren verfälschender Einfluss aufs Iterationsergebnis durch den Term $1 - Z_{aux}$ kompensiert wird.

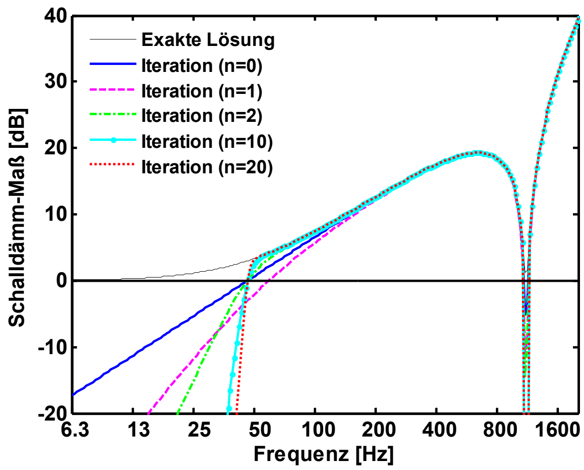

Abbildung 1: Schalldämm-Maß einer unendlichen dünnen Platte ohne Dämpfung bei schrägem Schalleinfall ($\Theta_I = 45°$): exakt berechnet mit Gl. (1) und iterativ angenähert nach Gl. (11). Iterationsanfang (n = 0) ist die "blocked pressure"-Näherung (3).

Alternativ wird Konvergenz dadurch sichergestellt, dass der von Gl. (11) definierte Schritt von $T^{(n-1)}$ nach $T^{(n)}$ um einen geeigneten Faktor α verkleinert (oder vergrößert) wird (Relaxationsverfahren [2]). Schließlich lässt sich die Iteration sogar mithilfe von Linearkombinationen der Bedingungen an den Grenzflächen zwischen Platte und Fluiden stabilisieren [3].

Fazit

"Spielereien" dieser Art veranschaulichen Zusammenhänge zwischen einfachen Näherungen und exakter Lösung sowie Probleme und Lösungsstrategien bei der iterativen Berechnung der Schalldämmung: eine Inspirationsquelle für schwierigere Fälle?

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung im Projekt "Das akustische Transmissionsproblem für plattenartige Strukturen".

Literatur

[1] W. Maysenhölder: Bending-wave energy propagation in inhomogeneous thin plates and membranes. Proc. Internoise Prague 2004, paper 787.

[2] A. Meister: Numerik linearer Gleichungssysteme. Eine Einführung in moderne Verfahren. Vieweg, 1999.

[3] P. Cummings, X. Feng: Domain decomposition methods for a system of coupled acoustic and elastic Helmholtz equations. Proc. 11th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods (1999) 206-213.