

# Möglichkeiten zur Berechnung der Schalldämmung dünner Platten

R. Piscoya<sup>1</sup>, Y. Aoki<sup>2</sup>, M. Ochmann<sup>1</sup>, W. Maysenhölder<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: piscoya@beuth-hochschule.de

<sup>2</sup>Fraunhofer-Institut für Bauphysik, 70569 Stuttgart, Email: yohko.aoki@ibp.fraunhofer.de

## Einleitung

In einem gemeinsamen DFG-Projekt werden verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Schalldämmung untersucht. Die Ermittlung des anregenden Schallfeldes, der Plattenbewegung und des abgestrahlten Schalls stellen Teilaufgaben dar, die auf mehrere verschiedene Arten gelöst werden können: mit analytischen Ansätzen oder diskretisiert (FEM oder BEM), mit modalen oder polynomialen Basisfunktionen zur Beschreibung der Plattenbewegung, näherungsweise oder (wenigstens im Prinzip) exakt.

Ausgewählte Kombinationen solcher Methoden werden einander gegenübergestellt. Neu scheint der Versuch zu sein, die "blocked pressure"-Näherung iterativ zu verbessern, d. h. die vernachlässigte Fluidlast ("fluid loading") wenn nötig schrittweise zu berücksichtigen. Entsprechend einer physikalisch motivierten Gebietszerlegung ("domain decomposition") erfolgen die Luft- und Körperschallberechnungen dabei getrennt und nacheinander. Das Konvergenzverhalten dieses iterativen Verfahrens wird in diesem Artikel präsentiert und in den weiteren Beiträgen [3] und [4] näher untersucht.

## Bewegungsgleichung der Platte

Die Verschiebung  $u$  einer dünnen Platte in senkrechter Richtung zur Plattenebene ist verantwortlich für die Übertragung von Schall von einer Seite zur anderen.

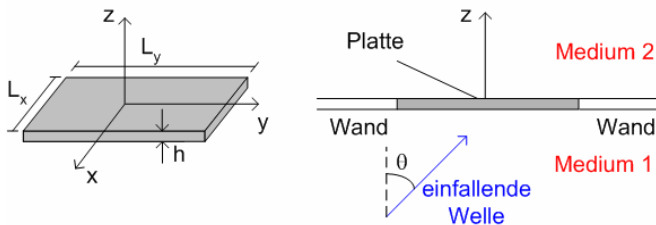


Abbildung 1: Endliche Platte in einer unendlichen starren Wand

Zur Bestimmung von  $u$  kann ein Variationsprinzip angewandt werden. Im Rahmen dieses Ansatzes entsprechen die Plattenschwingungen Extremwerten der Summe der Zeitintegrale der Lagrange-Funktion und der Arbeit der externen Kräfte. Wenn  $u$  in eine Modal- oder Polynom-Basis  $\phi^n$  entwickelt wird

$$u = \sum_n a_n \phi^n \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

lässt sich folgende Gleichung für die  $a_n$  herleiten [1]

$$\left( K_{qn} - \omega^2 M_{qn} + j\omega(Z_{qn}^{(1)} + Z_{qn}^{(2)}) \right) a_n = P_q^{bp} \quad (2)$$

wobei  $K_{qn}$  die Steifigkeitsmatrix,  $M_{qn}$  die Massenmatrix,  $Z_{qn}^{(1,2)}$  die Abstrahlungsimpedanzen und  $P_q^{bp}$  der "blocked pressure" sind. Für praktische Anwendungen muss man die unendlichen Reihen nach einer bestimmten Anzahl von Summanden ( $N$ ) abbrechen. Die Koeffizienten  $a_n$  werden numerisch bestimmt durch die Lösung der Gleichung (2).

## Lösung mit halb-analytischer Methode

Wenn man eine Polynombasis der Form

$$u = \sum_{nm} a_{nm} (2x/L_x)^n (2y/L_y)^m, \quad n, m=0, 1, \dots,$$

verwendet, enthalten alle Matrixelemente Integrale der Polynome über die Platte. Steifigkeits- und Massenmatrix können direkt berechnet werden, die andere Größen lassen sich nur als unendliche (teilweise aufwendige) Reihen ausdrücken. Die Polynombasis erlaubt die Berücksichtigung von beliebigen Randbedingungen. Diese werden durch einen Beitrag in der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt.

Das Schalldämmmaß  $R$  ergibt sich dann aus:

$$R = 10 \log \left( \frac{1}{\tau} \right), \quad \tau = \frac{\text{einfallende Leistung } (W_i)}{\text{transmittierte Leistung } (W_t)} \quad (3)$$

wobei

$$W_i = \frac{|p_0|^2 L_x L_y \cos \theta}{2 \rho_1 c_1}, \quad W_t = \frac{\omega^2}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{pqnm} a_{pq} Z_{pqnm}^{(2)} a_{nm}^* \right) \quad (4)$$

## Lösung mit FE-BE Methode

Mit dieser Methode wird das Schallfeld durch Diskretisierung der Platte und der Grundgleichungen berechnet. Durch die Kombination einer FE-Formulierung für die Bewegung der Platte und einer BE-Formulierung für die Schallabstrahlung erhält man ein Gleichungssystem für die Verschiebung  $u$  [2]

$$(K - \omega^2 M + j\omega(Z_1 + Z_2))u = Ap^{bp} \quad (5)$$

wobei  $K$  die Steifigkeitsmatrix,  $M$  die Massenmatrix,  $Z_1$  und  $Z_2$  die Abstrahlungsimpedanzen,  $A$  die Matrix der Elementflächen und  $p^{bp}$  der Vektor des "blocked pressure" sind.

Die Entwicklung des Vektors  $u$  nach Eigenschwingungen im Vakuum (so genannte "dry modes") bringt den Vorteil, dass ein kleineres Gleichungssystem als (5) gelöst wird, wobei die neuen unbekanntenen Größen die Amplituden der Eigenmoden ( $d$ ) sind.

$$\left( \omega_R^2 - \omega^2 I + j\omega \Phi^T (Z_1 + Z_2) \Phi \right) d = \Phi^T Ap^{bp} \quad (6)$$

$\omega_R^2$  ist die Diagonalmatrix  $\operatorname{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2)$  und  $\Phi$  die Matrix der Eigenvektoren.

Zur Bestimmung der Eigenmoden müssen Randbedingungen in jedem Knoten des Randes definiert werden.

Die einfallende Leistung ist durch (4) gegeben, die transmittierte Leistung lautet

$$W_t = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{Re}(p_{2i} v_i^*) S_i \quad (7)$$

mit  $v = j\omega \Phi d$ ,  $p_2 = -\rho_2 \omega^2 G \Phi d$ ,  $G =$  BEM-Systemmatrix.

Zum Vergleich der beiden Methoden werden die Eigenwerte und das Schalldämmmaß einer gelenkig gelagerten Platte graphisch dargestellt (Abb. 2).

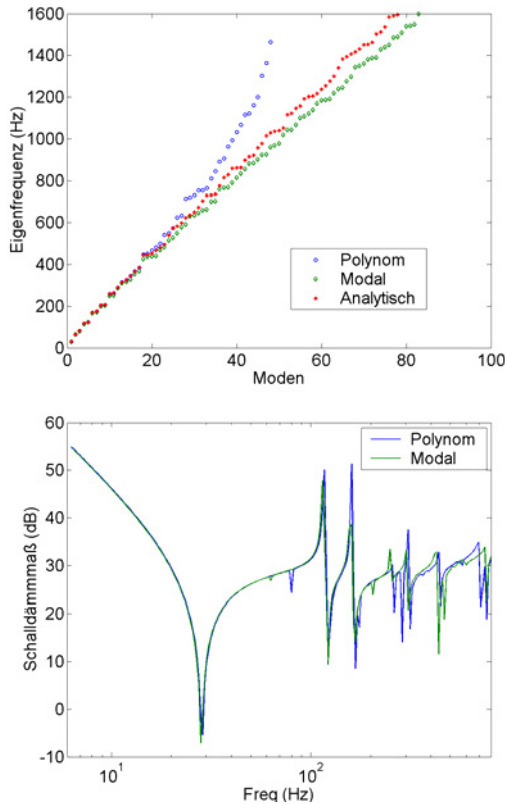


Abbildung 2: Vergleich der Ergebnisse von halb-analytisch und FE-BE Methoden

Die Eigenfrequenzen stimmen bis etwa 400 Hz bei beiden Methoden mit den analytischen Werten überein. Die Abweichungen bei der Polynombasis wachsen mit steigender Frequenz, da eine große Genauigkeit für die Bestimmung der Koeffizienten von  $K$  und  $M$  erforderlich ist. Die Kurven des Schalldämmmaßes sind praktisch identisch bis 100 Hz. Oberhalb dieser Frequenz werden die Differenzen größer.

### Iterative Methode

Ausgehend von der "blocked-pressure" Näherung wird die Verschiebung der Platte durch Verknüpfung von getrennten Körperschall- und Luftschallberechnungen sukzessiv verbessert, bis ein hinreichend genauer Wert erreicht ist.

Die Bewegung der Platte aufgrund der Druckerregung ist gegeben durch

$$v = L_p (\Delta p_M + \Delta p_E) . \quad (8)$$

Hierbei sind  $v$  die Normalgeschwindigkeit der Platte,  $L_p$  der Bewegungsoperator der Platte im Vakuum,  $\Delta p_M$  die Druckdifferenz infolge der Plattenbewegung und  $\Delta p_E$  die Druckdifferenz aufgrund der Schallquellen. Andererseits ist die Druckdifferenz infolge der Plattenbewegung gegeben durch

$$\Delta p_M = -(L_F^{(1)} + L_F^{(2)})v . \quad (9)$$

$L_F^{(1)}$  und  $L_F^{(2)}$  sind Operatoren, die die Anregung der Platte durch den Schall in den beiden fluiden Bereichen beschreiben.

Das iterative Verfahren kann mit Hilfe von (8) und (9) konstruiert werden. Der  $n$ -te Doppelschritt des Verfahrens lautet:

$$\Delta p_M^{(n)} = -(L_F^{(1)} + L_F^{(2)})v^{(n-1)}, \quad v^{(n)} = L_p (\Delta p_M^{(n)} + \Delta p_E) . \quad (10)$$

$v^{(-1)} = 0$  als Iterationsanfang führt auf den "blocked pressure"  $\Delta p_M^{(0)}$  und auf die "blocked pressure"-Näherung  $v^{(0)}$ .

Die Ausführung der iterativen Methode zeigt, dass in der Nähe der Eigenfrequenzen die Werte des Schalldämmmaßes divergieren, während für andere Frequenzen die Werte konvergieren.

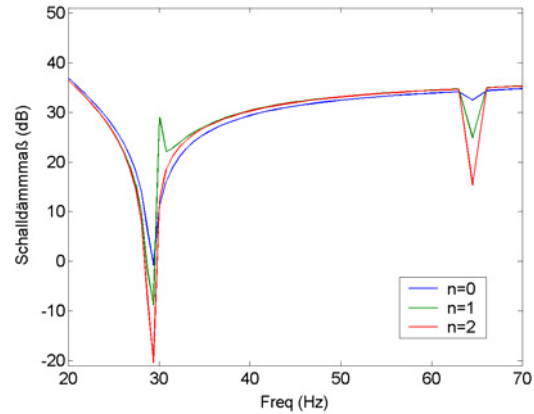


Abbildung 3: Schalldämmmaß bei der iterativen Methode.

Dies fängt damit zusammen, dass der Operator  $L_p$  in der Nähe der Eigenwerte bei verschwindender Dämpfung singular wird. Strategien zur Verbesserung der Methode werden in [3] und [4] diskutiert.

### Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden drei Methoden zur Berechnung des Schalldämmmaßes von dünnen Platten vorgestellt. Die beiden ersten sind direkte Methoden, wobei die eine halb-analytisch und die andere numerisch ist. Sie liefern gute Ergebnisse im untersuchten Frequenzbereich. Die dritte Methode ist iterativer Natur und zeigt in der verwendeten Form keine Konvergenz in der Nähe der Eigenfrequenzen der Platte.

### Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Forschungsprojektes "ATMOS" gefördert.

### Literatur

- [1] Woodcock R., Nicolas J.: A generalized model for predicting the sound transmission properties of generally orthotropic plates with arbitrary boundary conditions. *J. Acoust. Soc. Am.* 97(2) (1995), 1099-1112.
- [2] Piscocya R., Gorenflo N., Ochmann M., Benchmarking for the numerical prediction of sound transmission through slits, plates and shells, *Proceedings ICTCA 2009, Dresden*.
- [3] Aoki Y., Maysenhölder W., Iterative determination of the sound transmission loss of rectangular thin plates, *Fortschritte der Akustik, DAGA 2010, Berlin, 2010*.
- [4] Maysenhölder W., Aoki Y., Berechnung der Schalldämmung: einfache Näherungen und iterative Bestimmung für unendliche homogene Platten, *Fortschritte der Akustik, DAGA 2010, Berlin, 2010*.