Teilanalytische Lösung der Integrale der Randelemente Methode mit numerisch bestimmter Greenscher Funktion für geschichtete anisotrope Medien

Holger Waubke, Wolfgang Kreuzer, Georg Rieckh

Institut für Schallforschung, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Wohllebengasse 12-14, A-1040 Wien, Email: holger.waubke@oeaw.ac.at

Einleitung

Numerisch bestimmte Greensche Funktionen ermöglichen es eine Vielzahl von Medien zu erfassen, für die keine analytische Beschreibung vorhanden ist. In dieser Arbeit soll mittels numerisch bestimmter Greenschen Funktion ein horizontal geschichteter linear elastischer anisotroper Halbraum behandelt werden. Das Koordinatensystem der Anisotropie folgt den Koordinaten des geschichteten Halbraums. Um die Gleichungen zu vereinfachen, wird der Sonderfall eines orthotropen Mediums behandelt, bei dem sich nur die vertikale Richtung von den horizontalen Richtungen unterscheidet.

In diesem Medium wird eine Kavität behandelt, die mittels der Randelemente Methode beschrieben werden soll. Dazu ist es notwendig, die Umrandung des Hohlraumes mit Elementen zu diskretisieren. Ziel ist es, die Weiterleitung von Erschütterungen in Bahntunneln zu beschreiben.

Da Bahntunnel in der Längsrichtung (im Weiteren die x-Richtung) meist gerade oder nahezu gerade sind, soll in dieser Richtung im transformierten Raum der Wellenzahlen k_x beibehalten werden. Dies bedeutet, dass eine Folge zweidimensionaler Randelemente Modelle zu behandeln sind (Richtungen y und z). Die Transformation in den Wellenzahlraum geschieht mittels eines modifizierten Planscherelschen Theorems.

Ein offenes Problem bleibt die Behandlung der Randintegrale über Singularitäten der Fundmentallösung, wenn die Greensche Funktion nur numerisch bestimmt werden kann. Die Greensche Funktion kann im gegebenen Fall im Wellenzahl-Frequenz-Raum teilweise analytisch bestimmt werden. Die Rücktransformation über die vertikale Koordinate z ist analytisch möglich. Hingegen erfolgt die Rücktransformation über die horizontale Koordinate y numerisch. Im Folgenden wird eine Umkehrung der Reihenfolge Fourier Rücktransformation und Integral über Element bei Verwendung konstanter Ansatzfunktionen (Kollokation) verwendet, um das Elementintegral analytisch zu lösen. Es verbleibt damit nur die Rücktransformation über einen modifizierten regulären Kern.

Darstellung der homogenen Lösung im Wellenzahl Frequenzraum

Im Wellenzahl-Frequenz-Raum lässt sich die homogene Lösung für ein anisotropes Medium mittels einer Matrix mit 3 Zeilen und Spalten darstellen [1,2], die ausschließlich von den Verformungen u_x, u_y und u_z abhängt. Die Determinante der Matrix ist ein Polynom 6. Grades, welches quadratisch in den Wellenzahlen k_x, k_y, k_z und der Winkelfrequenz Ω ist. Damit lässt sich eine kubische Parabel in Abhängigkeit von k_z^2 aufstellen. Aus der positiven und negativen Wurzel ergeben sich die sechs Eigenwerte $k_{z,i}$ der verschiedenen Wellentypen im Medium. Den Eigenwerten werden die Eigenvektoren Ψ_i zugeordnet.

Aus den Eigenvektoren der Verformung lassen sich über die transformierte Differentialmatrix **D** und die Elastizitätsmatrix **E** die Eigenvektoren der Spannungen $\Psi_{\sigma,i}$ zuordnen.

$$\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\sigma},i}\left(k_x,k_y,\Omega\right)=\mathbf{E}\mathbf{D}_i\boldsymbol{\psi}_i\left(k_x,k_y,\Omega\right) \tag{1}$$

$$\mathbf{D}_i=\begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_{z,i} \\ 1/2\,jk_y & 1/2\,jk_x & 0 \\ 0 & 1/2\,jk_{z,i} & 1/2\,jk_y \\ 1/2\,jk_{z,i} & 0 & 1/2\,jk_x \end{bmatrix} \tag{2}$$

Rücktransformation über *z*

Mittels der Dirac-Funktion lässt sich aus den Eigenpaaren im transformierten Raum eine Funktion beschreiben, deren Rücktransformation lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}\left(k_x,k_y,z,\Omega\right)&=\sum_{i=1}^{6}A_i\boldsymbol{\psi}_i\left(k_x,k_y,\Omega\right)\;e^{jk_{z,i}z}\\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\left(k_x,k_y,z,\Omega\right)&=\sum_{i=1}^{6}A_i\mathbf{E}\mathbf{D}_i\boldsymbol{\psi}_i\left(k_x,k_y,\Omega\right)e^{jk_{z,i}z}\end{aligned} \tag{3}$$

Die unbekannten Skalierungen A_i werden durch Kompatibilität der Verformungen und Spannungsgleichgewicht an den Schichtgrenzen bestimmt. Für den Halbraum lassen sich mittels der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung die drei Faktoren zu Null setzen, die zu aufklingenden Lösungen gehören.

Randelemente Methode im transformierten Raum

Um die Randintegrale in den transformierten Raum zu überführen wird eine modifizierte Version des Planscherelschen Theorems verwendet.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x)H(-k_x)dk_x \tag{4}$$

Das Single Layer (SL) und das Double Layer (DL) Potential lauten:

$$\begin{aligned} SL:\quad & \Pi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{S} \breve{\mathbf{u}}^{*}(-k_x, y(s), z(s), \Omega)\, \breve{\mathbf{t}}(k_x, y(s), z(s), \Omega)\, ds\, dk_x \\ DL:\quad & \Pi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{S} \breve{\mathbf{u}}(k_x, y(s), z(s), \Omega)\, \breve{\mathbf{t}}^{*}(-k_x, y(s), z(s), \Omega)\, ds\, dk_x \end{aligned} \tag{5}$$

Es sind also die fundamentalen Verformungen **u*** und Spannungen **t*** bei $-k_x$ auszuwerten, um die unbekannten Größen bei $+k_x$ bestimmen zu können.

Vorgehen beim Single Layer Potential

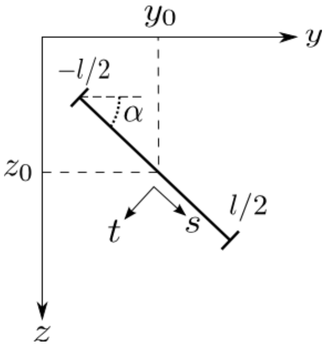

Abbildung 1: Elementkoordinaten und globale Koordinaten

Es wird angenommen, dass die Spannungen $\mathbf{p}_0$ bzw. Verformungen $\mathbf{u}_0$ auf dem Element konstant sind. Damit ergibt sich für das Single Layer Potential:

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{p}}_0(k_x, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}_0(x,t)\, e^{-j(k_x x + \Omega t)}\, d\Omega\, dk_x \\ I &= \int_{-l/2}^{l/2} \breve{\mathbf{u}}^{*T}(-k_x, y(s), z(s))\, \breve{\mathbf{p}}_0(k_x, \Omega)\, ds \\ I &= \int_{-l/2}^{l/2} \breve{\mathbf{u}}^{*T}(-k_x, \cos\alpha\, s + y_0, \sin\alpha\, s + z_0)\, \breve{\mathbf{p}}_0(k_x, \Omega)\, ds \end{aligned} \tag{6}$$

Die Verformungen **u** werden durch die Fourier-Rücktransformation $\tilde{\mathbf{u}}$ ersetzt und das Element-Integral durch Einfügen einer Box-Funktion auf unendlich erweitert:

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} & \tilde{\mathbf{u}}^{*T}(-k_x, k_y, \sin\alpha\, s + z_0, \Omega)\, e^{jk_y(\cos\alpha\, s + y_0)} dk_y \\ & \breve{\mathbf{p}}_0(k_x)\left[H(s + l/2) - H(s - l/2)\right] ds \end{aligned} \tag{7}$$

Das Spektrum der Fundamentallösung wird mittels Gleichung (3) auf Basis der sechs Wellenzahlen zerlegt:

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{6} & \left[A_i \Psi_i^T\, e^{jk_{z,i}(\sin\alpha\, s + z_0)}\right] e^{jk_y(\cos\alpha\, s + y_0)} dk_y \\ & \breve{\mathbf{p}}_0(k_x)\left[H(s + l/2) - H(s - l/2)\right] ds \end{aligned} \tag{8}$$

Durch eine Substitution und Austausch der Integrale entsteht eine Fourier Rücktransformation über die Box-Funktion,

$$\begin{aligned} & k_s = k_{z,i} \sin\alpha + k_y \cos\alpha \\ & I = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{6} \left[\begin{array}{l} A_i \Psi_i^T\, \breve{\mathbf{p}}_0\, e^{j(k_{z,i} z_0 + k_y y_0)} \cdot \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[H(s + l/2) - H(s - l/2)\right] e^{jk_s s} ds \end{array}\right] dk_y \end{aligned} \tag{9}$$

die eine sinc-Funktion ergibt.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{6} \left[\begin{array}{l} A_i \Psi_i^T\, \breve{\mathbf{p}}_0\, e^{j(k_{z,i} z_0 + k_y y_0)} \cdot \\ \dfrac{l}{2\pi} \mathrm{sinc}\left(l/2\left(k_{z,i} \sin\alpha + k_y \cos\alpha\right)\right) \end{array}\right] dk_y \tag{10}$$

Die sinc-Funktion führt zu einem Abfall des Kerns gegenüber der Originalfunktion für zunehmendes k_y. Des Weiteren führen die Koordinaten des Elementursprungs zu einer Modulation im Spektrum.

In gleicher Weise lässt sich auch das Double Layer Potential anschreiben.

Die beschriebene Methode lässt sich nicht nur auf die Elemente mit Singularitäten anwenden, sondern auch auf reguläre Elemente.

Fourier Rücktransformation

Der letzte Schritt ist die Fourier Rücktransformation der Auswertepunkte der Randelemente Methode über der Koordinate x.

Zusammenfassung

Es wurde eine Methode entwickelt um die Integrale mit Singularitäten, die bei der direkten Randelemente Methode vorhanden sind zu berechnen. Dabei entfällt die numerische Integration über das Element, weshalb die Methode auch für reguläre Elemente Anwendung findet. Dabei ist das Element in zwei Teile zu zerlegen, wenn das Element über eine Schichtgrenze hinausragt. Dies gilt insbesondere für die singulären Integrale, da auf Höhe der Testfunktion eine Schichtgrenze einzuführen ist.

Literatur

[1] Waubke, H., Kreuzer, W.: Lastansätze innerhalb einer Schicht eines geschichteten anisotropen Mediums. DAGA 2008, CD-ROM

[2] Waubke, H.:Transform Methods for Horizontally Layered Isotropic and Anisotropic Media with Obstacles, DAGA 2004, CD-ROM