Akustische Strahlungskräfte bei Festkörperwellen (II)

O. Bschorr[1], J. Starke[2], N. Kalus[3]
[1]Aeroakustik, Stuttgart [2]Astrium GmbH, Bremen [3]Beuth Hochschule für Technik Berlin

Einleitung

In der Vorgängerarbeit [DAGA-2010, S. 919] wurden die Strahlungskräfte von longitudinalen und transversalen Volumenwellen abgeleitet. Diese Untersuchung wird hier mit den gleichen Vereinbarungen am Beispiel von quasi-longitudinalen Wellen, auf Führungs- und Deviationswellen erweitert. Dazu wird es notwendig, zu der dilatorischen und rotatorischen auch die deviatorische Verformung separat auszuweisen.

Elastische Verformung

Verformungsarten. Zugrunde liegt ein elastischer Festkörper, der Übersichtlichkeit wegen sei dieser zunächst homogen, isotrop, verlustfrei und linear. In den feststehenden x**i**,y**j**,z**k**–Koordinaten habe eine elastische Welle mit der Frequenz ω an einem Referenzpunkt **O** die vektorielle Auslenkung **s** = **s**(x,y,z,t) und den Gradienten ∇**s**. Übereinstimmend mit dem Fundamentalsatz der Kinematik setzt sich jede Dyade – und damit auch ∇**s** - aus drei irreduziblen und orthogonalen Komponenten # = {Dil, Rot, Dev} zusammen: [Lohr. 1, S. 95]

$$(26)\quad \nabla\mathbf{s} = \Sigma(\nabla\mathbf{s})_{\#} = (\nabla\mathbf{s})_{Dil} + (\nabla\mathbf{s})_{Rot} + (\nabla\mathbf{s})_{Dev}$$
$$(27)\quad = \tfrac{1}{3}\,\mathbf{U}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{U}\mathrm{x}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s} + \mathbf{dev}\,\mathbf{s}$$

Dil: Die Dilatation umfasst die formtreue Volumenänderung und wird durch den Kugel-Tensor $(\nabla\mathbf{s})_{Dil} = \tfrac{1}{3}\mathbf{U}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s}$ beschrieben. (**U** = **{ii + jj + kk}** = Einheitsdyade)
Rot: Die Rotation stellt die form- und volumentreue Rotationsbewegung dar, ist durch die antisymmetrische Dyade $(\nabla\mathbf{s})_{Rot} = (\nabla\mathbf{s})_{asym} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} - \nabla\mathbf{s}^T) = -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{U}\,\mathrm{x}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s}$ festgelegt und hat Dipolcharakteristik.
Dev: Kinematisch beschreibt die Deviation die volumentreue (→div **s** = 0) und rotationsfreie (→**rot s** = **0**) Verzerrung. Mathematisch ist $(\nabla\mathbf{s})_{Dev}$ eine spurlose, symmetrische 3x3-Dyade und enthält die Quadrupol-Komponente. Es ist zweckvoll, nach Gl. (27) für die deviatorische Verformung einen eigenen **dev**-Operator einzuführen:

$$(28)\quad \mathbf{dev}\,\mathbf{s} := (\nabla\mathbf{s})_{Dev} = \nabla\mathbf{s} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{U}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{U}\mathrm{x}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s}$$
$$(29)\quad = (\nabla\mathbf{s})_{sym} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{U}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s}$$

Darin ist $(\nabla\mathbf{s})_{sym} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{s} + \nabla\mathbf{s}^T) = (\nabla\mathbf{s})_{Dil} + (\nabla\mathbf{s})_{Dev}$ die symmetrische Komponente von ∇**s**. Der Deviator **dev s** [-] hat nach (40) die Norm N_{Dev} und z.B. die Hauptmoden:

$$(30)\quad (\mathbf{dev}\,\mathbf{s})' = \frac{N_{Dev}}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (31)\quad (\mathbf{dev}\,\mathbf{s})'' = \frac{N_{Dev}}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Im Anhang findet sich der Sonderfall zweidimensionaler Deviation in Zusammenhang mit der Potentialströmung und komplexen Funktionen.

Operatoren. Die Dilatation ist durch den skalaren div-**,** die Rotation durch den vektoriellen **rot-** und die Deviation durch den dyadischen **dev-**Operator bestimmt. Die beim **dev-**Operator in Gln. (28) / (34) auftretenden Saldoterme - **U**div **s** und **U**x**rot s** - gewährleisten die Kompatibilität:

$$(32)\quad \mathrm{div}\,\mathbf{s} = \mathbf{U}\cdot\cdot\nabla\mathbf{s} \qquad \mathbf{U}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{asym} = 0$$
$$(33)\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{s} = \mathbf{U}\cdot\mathrm{x}\nabla\mathbf{s} \qquad \mathbf{U}\cdot\mathrm{x}(\nabla\mathbf{s})_{sym} = \mathbf{0}$$
$$(34)\quad \mathbf{dev}\,\mathbf{s} = -\mathbf{U}\mathrm{xx}\nabla\mathbf{s} + \tfrac{2}{3}\,\mathbf{U}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{U}\mathrm{x}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s}$$

Orthogonalität I, II. Das doppelskalare Produkt von symmetrischem und antisymmetrischem Tensor ist stets Null, auch das von Kugel- und Spurlos-Tensor. Also:

$$(35)\quad (\nabla\mathbf{s})_{Rot}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{Dev} = \mathbf{0} \qquad (38)\quad (\nabla\mathbf{s})_{Dil}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{Dil} = N_{Dil}^2$$
$$(36)\quad (\nabla\mathbf{s})_{Dev}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{Dil} = \mathbf{0} \qquad (39)\quad (\nabla\mathbf{s})_{Rot}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{Rot} = N_{Rot}^2$$
$$(37)\quad (\nabla\mathbf{s})_{Dil}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{Rot} = \mathbf{0} \qquad (40)\quad (\nabla\mathbf{s})_{Dev}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_{Dev} = N_{Dev}^2$$

Die Gesamt-Auslenkung $\mathbf{s} = \Sigma\mathbf{s}_{\#} = \mathbf{s}_{Dil} + \mathbf{s}_{Rot} + \mathbf{s}_{Dev}$ reduziert sich ebenfalls auf die drei Komponenten $\mathbf{s}_{\#}$. Dazu wird der **s**-Verlauf im Abstand **r** von **O** in die Taylor-Reihe (41) $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = (\ )_0 + (\ )_1 + (\ )_2 + \ldots$entwickelt. Auf **s**(**r**) die drei Operatoren div, **rot** und **dev** angewandt, liefert das Linearglied $(\ )_1 = \mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{s} = \Sigma\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{s}_{\#}$ die Identitäten (42) - (44) und die Orthogonalitäten (45) - (47). Das Null-Glied $(\ )_0$ enthält die integralen Eigenschaften und hat keinen Beitrag. Die höheren Reihenglieder sind nichtlinear. (div **r** = 3, **rot r** = **0**, **rot** (**r**x**rot s**) = -2 **rot s**, **dev r** = **0**, ∇**r** = **U**).

$$(41)\quad \mathbf{s}(\mathbf{r}) = ()_0 + (\tfrac{1}{3}\,\mathbf{r}\mathrm{div}\,\mathbf{s} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{rot}\,\mathbf{s} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{dev}\,\mathbf{s})_1 + ()_2 + \ldots$$
$$(42)\quad \mathrm{div}\,\mathbf{s}_{Dil} = \mathrm{div}\,\mathbf{s} \;\rightarrow (45)\quad \mathrm{div}\,\mathbf{s}_{Rot} = \mathrm{div}\,\mathbf{s}_{Dev} = 0$$
$$(43)\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{s}_{Rot} = \mathbf{rot}\,\mathbf{s} \;\rightarrow (46)\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{s}_{Dil} = \mathbf{rot}\,\mathbf{s}_{Dev} = \mathbf{0}$$
$$(44)\quad \mathbf{dev}\,\mathbf{s}_{Dev} = \mathbf{dev}\,\mathbf{s} \;\rightarrow (47)\quad \mathbf{dev}\,\mathbf{s}_{Div} = \mathbf{dev}\,\mathbf{s}_{Rot} = \mathbf{0}$$

Tensorpotential. Der Auslenkungsvektor **s** mit den Komponenten $\mathbf{s}_{\#}$ wird nach **s** = div **RS** auf ein von zwei Vektoren **R** und **S** gebildetes Tensorpotential **RS** zurückgeführt. Dazu wird **RS** in seine Komponenten $(\mathbf{RS})_{\#}$ zerlegt:

$$(48)\quad \mathbf{RS} = \Sigma(\mathbf{RS})_{\#} = \tfrac{1}{3}\,\mathbf{U}\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{S} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{U}\mathrm{x}(\mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{S}) + (\mathbf{RS})_{Dev}$$
$$(49)\quad \mathbf{s}_{\#} = \mathrm{div}\,(\mathbf{RS})_{\#} \qquad (50)\quad \mathbf{s} = \Sigma\mathbf{s}_{\#} = \Sigma\mathrm{div}\,(\mathbf{RS})_{\#}$$

Ersetzt man **R** durch den Nabla-Vektor, also **R** → ∇ und schränkt zusätzlich auf die Proportionalität $\mathbf{S} = \mathbf{s}/k^2$ ein, so erhält man die Rekursionen:

$$(51)\quad -k^2\,\mathbf{s}_{Dil} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s}_{Dil}$$
$$(52)\quad k^2\,\mathbf{s}_{Rot} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s}_{Rot}$$
$$(53)\quad -k^2\,\mathbf{s}_{Dev} = \mathrm{div}\,\mathbf{dev}\,\mathbf{s}_{Dev}$$

Wird die freie Konstante k als Wellenzahl interpretiert, dann entspricht Gl. (51) der longitudinalen, (52) der transversalen und (53) der deviatorischen Wellengleichung.

Symmetrischer Spannungstensor. Dem Hookeschen Ansatz entsprechend werden für die drei Verformungsarten $(\nabla\mathbf{s})_\#$ die Elastizitätsmodule $E_\#$ [Pa] und die Spannungstensoren $\mathbf{T}_\# = E_\# (\nabla\mathbf{s})_\#$ [Pa] eingeführt. Zum Abgleich mit der Theorie von Lamé wird auf den symmetrischen Spannungstensor $\mathbf{T}_{sym}$ (54) mit den dilatorischen und den deviatorischen Komponenten $\mathbf{T}_{Dil}$ und $\mathbf{T}_{Dev}$ eingeschränkt. Demgegenüber enthält der Lamésche Spannungstensor $\mathbf{T}_{Lamé}$ (55)/(56) die Stoffkoeffizienten $\mu_{Lamé}$ und $\eta_{Lamé}$. Diese beziehen sich auf formalmathematische Ausdrücke, auf die symmetrische Komponente $(\nabla\mathbf{s} + \nabla\mathbf{s}^T) = 2(\nabla\mathbf{s})_{sym} = 2(\nabla\mathbf{s})_{Dil} + 2(\nabla\mathbf{s})_{Dev}$ und auf die Spur spur $\nabla\mathbf{s}$ = div $\mathbf{s}$.

(54) $\mathbf{T}_{sym} = E_{Dil}\,(\nabla\mathbf{s})_{Dil} + E_{Dev}\,(\nabla\mathbf{s})_{Dev}$

(55) $\mathbf{T}_{Lamé} = 2\mu_{Lamé}\,(\nabla\mathbf{s})_{sym} + \eta_{Lamé}\,\mathrm{spur}\,\nabla\mathbf{s}\,\mathbf{U}$

(56) $\quad = (2\mu_{Lamé} + 3\eta_{Lamé})\,(\nabla\mathbf{s})_{Dil} + 2\mu_{Lamé}\,(\nabla\mathbf{s})_{Dev}$

(57) $E_{Dil} = K/3 = 2\mu_{Lamé} + 3\eta_{Lamé}$ (58) $E_{Dev} = 2\mu_{Lamé}$

Die Gleichheit $\mathbf{T}_{sym} \equiv \mathbf{T}_{Lamé}$ ergibt für den Dilatationsmodul $E_{Dil} = K/3 = 2\mu_{Lamé} + 3\eta_{Lamé}$ und entspricht dem bekannten und tabellierten Kompressionsmodul K. Für den Deviationsmodul gilt: $E_{Dev} = 2\mu_{Lamé}$.

Fallbeispiele: Führungswellen. Deviationswellen.
Noch offen sind die akustischen Strahlungskräfte in Führungswellen. *Pars pro toto* sollen hier die quasi-longitudinalen Führungswellen in Platten (B) und Stäben (C) untersucht und der longitudinalen Volumenwelle (A) gegenüber gestellt werden. Bei Ausbreitung in x**i**-Richtung wird die Wellenart & = {A, B, C} durch das Verhältnis von Wellenlänge $\lambda_\& = 2\pi/k_\&$ zum Querschnitt $H_y\mathbf{j}$ und $H_z\mathbf{k}$ des Wellenleiters bestimmt. (60) - (62). Die Wellengleichung (59) enthält den in linearer Näherung vernachlässigbaren Term $\mathbf{0}(y\mathbf{j}, z\mathbf{k})$

(59) $\mathbf{s}_\& = s_0\,\mathbf{i}\sin(\omega t - 2\pi k_\& x) + \mathbf{0}(y\mathbf{j}, z\mathbf{k})$

(60) **A**: $H_y, H_z >> \lambda_A \quad\to\quad \nabla\mathbf{s}_A = \varepsilon\,\mathbf{ii} \qquad \varepsilon := \partial s_x/\partial x$

(61) **B**: $H_z >> \lambda_B >> H_y \quad\to\quad \nabla\mathbf{s}_B = \varepsilon\,(\mathbf{ii} - \nu_B\,\mathbf{jj})$

(62) **C**: $\lambda_C >> H_y = H_z \quad\to\quad \nabla\mathbf{s}_C = \varepsilon\,(\mathbf{ii} - \nu_C\,(\mathbf{jj} + \mathbf{kk}))$

Bei der Volumenwelle A besitzt der Gradient $\nabla\mathbf{s}_A = \varepsilon\,\mathbf{ii}$ nur eine Bewegung in Longitudinalrichtung. (Setzungen: $\varepsilon = \partial s_x/\partial x$ und $\sin(\omega t - 2\pi k_\& x) = 1$). Bei der Plattenwelle B kommt es zu der Poisson´schen Querkontraktion ν_B [-] in **j**-Richtung (61) und bei der Stabwelle C zur Querkontraktion ν_C [-] in **j**- und **k**-Richtung**.** (62).
Dem Gradienten $\nabla\mathbf{s}_\&$ kann ein für die Wellenart & gültiger effektiver Elastizitätsmodul $E_\&$ mit dem Spannungstensor $\mathbf{T}_\& = E_\&\,\nabla\mathbf{s}_\&$ zugeordnet werden. Zum andern bilden die Komponenten $\nabla\mathbf{s}_{\&,Dil}$ und $\nabla\mathbf{s}_{\&,Dev}$ von $\nabla\mathbf{s}_\&$ den Tensor $\Sigma\mathbf{T}_{\&,\#}$. Die aus der Identität $\mathbf{T}_\& = E_\&\,\nabla\mathbf{s}_\& \equiv \Sigma\mathbf{T}_{\&,\#}$ folgenden Einzelgleichungen lauten: (63) – (65)

(63) $\mathbf{T}_A = E_A\nabla\mathbf{s}_A = \varepsilon E_{Dil}\,\mathbf{U}/3 \;+\; \varepsilon E_{Dev}\,\{\{2\mathbf{ii}\text{-}\mathbf{jj}\text{-}\mathbf{kk}\}/3$

(64) $\mathbf{T}_B = E_B\nabla\mathbf{s}_B = \varepsilon E_{Dil}\,(1-\nu_B)\mathbf{U}/3 \;+$
$\qquad + \;\varepsilon E_{Dev}\,\{(2+\nu_B)\mathbf{ii} - (1+2\nu_B)\mathbf{jj} - (1-\nu_B)\mathbf{kk})\}/3$

(65) $\mathbf{T}_C = E_C\nabla\mathbf{s}_C = \varepsilon E_{Dil}\,(1-2\nu_C)\mathbf{U}/3 \;+$
$\qquad + \;\varepsilon E_{Dev}\,\{(1+\nu_C)\{2\mathbf{ii}\text{-}\mathbf{jj}\text{-}\mathbf{kk})\}/3$

Die Spannungen in Ausbreitungsrichtung **i** sind $\sigma_\& = \mathbf{ii}\cdot\cdot\mathbf{T}_\& = E_\&\,\mathbf{ii}\cdot\nabla\mathbf{s}_\& \equiv \Sigma\mathbf{ii}\cdot\mathbf{T}_{\&,\#}$. Daraus bestimmen sich der effektive Elastizitätsmodul $E_\& = \sigma_\&/\varepsilon$ und die Wellengeschwindigkeit $c_\&^2 = E_\&/\rho$:

(66) $c_A^2 = E_A/\rho = [E_{Dil} + 2\,E_{Dev}]/3\rho \qquad \equiv c_L^2$

(67) $c_B^2 = E_B/\rho = [(1 - \nu_B)E_{Dil} + (2 + \nu_B)E_{Dev}]/3\rho$

(68) $c_C^2 = E_C/\rho = [(1 - 2\nu_C)E_{Dil} + (2 + 2\nu_C)E_{Dev}]/3\rho$

Danach setzen sich die longitudinalen Führungswellen & aus einem dilatorischen und einem deviatorischen Anteil zusammen. Eine reine Deviationswelle besteht bei der Poisson-Zahl ν_C = ½. (69). Die Wellenenergie e ist:

(69) $c_{Dev}^2 = c_C^2 = E_{Dev}/\rho \qquad$ Für: $\nu_C \to$ ½

(70) $e = 2e_{Kin} = 2e_{Pot} = \langle\rho v_\&^2\rangle_t = \langle E_\&\,(\nabla\mathbf{s})_\&\cdot\cdot(\nabla\mathbf{s})_\&\rangle_t$

Strahlungskräfte
Mit $\mathbf{i} \to \mathbf{t}$ für die allgemeine Wellenausbreitung den begleitenden Tangentenvektor **t** und den Impulstensor $\mathbf{Q}_0 = e\mathbf{tt}$ eingeführt, kann das Ergebnis für Volumenwellen (23)-(25) mit der Strahlungskraft **f** = div **Q** und dem Strahlungsdruck **p** = Div **Q** auch auf die hier untersuchten Führungswellen übertragen werden.

Anhang: 2D-Deviation ↔ Potentialströmung
Die zweidimensionale Auslenkung **s** hat die 2x2 Dyade $\nabla\mathbf{s}$ und den div- und **rot**-Operator:

(71) $\mathbf{s} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ (72) $\nabla\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{bmatrix}$

(73) $\mathrm{div}\,\mathbf{s} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y \quad\to\quad \mathrm{div}\,\mathbf{s}_{Dev} = 0$

(74) $\mathbf{rot}\,\mathbf{s} = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \quad\to\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{s}_{Dev} = \mathbf{0}$

Bei Deviation mit div $\mathbf{s}_{Dev}$ = 0 und **rot** $\mathbf{s}_{Dev}$ = **0** wird die Dyade (72) spurlos und symmetrisch.
Die Theorie der Potentialströmung verwendet analytische Funktionen f(z) = u + iv zur Beschreibung ebener, inkompressibler und rotationsfreier Bewegungen. ($i = \sqrt{-1}$). Mit der komplexen Variablen z = x + iv gelten die Cauchy/ Riemann-Relationen.

(75) $\partial u/\partial x - \partial v/\partial y = 0$ (76) $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y = 0$

Diese Bedingungen sind äquivalent den Forderungen (73) / (74) mit div $\mathbf{s}_{Dev}$ = 0 und **rot** $\mathbf{s}_{Dev}$ = **0.** Die Diskrepanz bei den Vorzeichen verschwindet, wenn anstelle von f(z) die konjugiert komplexe Funktion f*(z)= f*(u – iv) als Basis gewählt wird. Mit

(77) $\mathbf{dev}\,\mathbf{s} = \mathbf{dev}\,(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \leftrightarrow \partial f^*/\partial z = \partial f^*(u - iv)/\partial z$

liefert diese Vereinbarung die Auslenkungen u und v direkt und ohne Zwischenschaltung von Potentialfunktionen.

Quellen
[1] E. Lohr: Vektor- u. Dyadenrechnung für Physiker und Ingenieure. de Gruyter-Verlag. Berlin. 1939.
[2] G. Wittek: Aspekte der Vektor- und Tensor-Analysis. Kiel 2005 ff. Persönliche Mitteilungen.