

# Numerische Berechnung eines Fluids innerhalb und um einer Blockflöte

Stefanie Fuß<sup>1</sup>, Steffen Marburg<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, UniBw München, Neubiberg, Deutschland, Email: stefanie.fuss@unibw.de

## Einleitung

Beim Spielen einer Blockflöte wird ein Luftstrom in das Instrument eingebracht, welcher die Luftsäule im Inneren der Flöte zum Schwingen anregt. Der Spieler ist in der Lage die Tonfrequenz durch Variation des Anblasdrucks zu beeinflussen und somit eine Feinabstimmung im Klang zu erreichen.

In einem ersten Schritt werden die Eigenfrequenzen der Flöte mittels einer Modalanalyse des ruhenden Fluids, welches sich innerhalb und um der Blockflöte befindet, ermittelt. Dies erfolgt numerisch mithilfe der druckbasierten Helmholtzgleichung für Außenraumprobleme unter Verwendung von finiten und infiniten Elementen [1].

Im nächsten Schritt soll die Modalanalyse bei Berücksichtigung der rotationsbehafteten Strömung und unter Verwendung der Galbrungleichung durchgeführt werden. Hierzu wird die Blockflöte zunächst vereinfacht als Rohr dargestellt. Sowohl analytisch als auch numerisch wurde dabei festgestellt, dass bei einem konstanten Volumenstrom die Eigenfrequenzen bei zunehmender Strömungsgeschwindigkeit abnehmen. Bei der Blockflöte kann dies aber nicht der Fall sein. Denn beim Spielen der Flöte ist leicht feststellbar, dass der Ton höher wird, je stärker der eingebrachte Luftstrom ist.

Wir vermuten, dass diese Diskrepanz vom charakteristischen Strömungsprofil innerhalb der Flöte herrührt. In der Flöte herrscht keine konstante Strömungsgeschwindigkeit und vor allem im Bereich des Labium treten starke Verwirbelungen auf.

Unser Ziel ist es, diesen Effekt numerisch nachzuweisen und den Einfluss der Strömung auf die Frequenz zu untersuchen. In diesem Artikel sind die ersten Schritte auf diesem Weg dargestellt.

## Modalanalyse ohne Strömung

Das hier betrachtete Randwertproblem setzt sich aus der Helmholtzgleichung, der Neumann-Randbedingung am Innenrand sowie der Sommerfeld-Randbedingung für die infiniten Elemente zusammen. Während die Neumann-Randbedingung eine schallharte Flötenwand garantiert, stellt die Sommerfeld-Randbedingung sicher, dass nur nach außen propagierende Wellen im Fernfeld von der Flöte existieren. Diese Formulierung führt auf ein quadratisches Eigenwertproblem mit Massen- ( $M$ ), Steifigkeits- ( $K$ ) und Dämpfungsmatrix ( $D$ ), welches in den folgenden Zustandsraum transformiert wird [3]

$$\left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & I \\ M & D \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

mit  $\Phi = \lambda\Psi$  und  $\lambda = -ik$ .

Die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren erfolgt numerisch mittels eines iterativen Arnoldi-Algorithmus in einem von den Autoren entwickelten Fortran 90 Code. Abbildung 1 zeigt die Eigenvektoren des Grundtons und des ersten Obertons der Note b''.

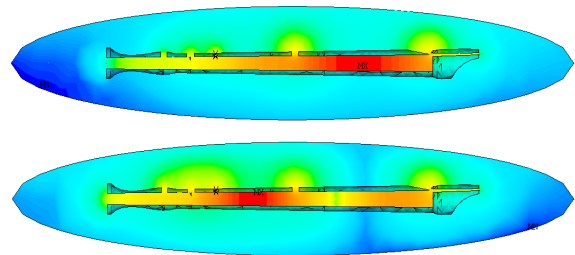


Abbildung 1: Grundton (oben) und erster Oberton (unten) für b''.

Bei der untersuchten Flöte handelt es sich um eine Sopranblockflöte mit deutscher Griffweise und Stimmung auf 442 Hz. Um Aussagen über das Konvergenzverhalten treffen zu können, wurden die berechneten Eigenfrequenzen mit den entsprechenden Werten aus der MIDI-Tabelle verglichen. Der Ton b'' beträgt laut MIDI-Tabelle 932,33 Hz. In Abbildung 2 ist das Konvergenzverhalten des Tones b'' dargestellt.

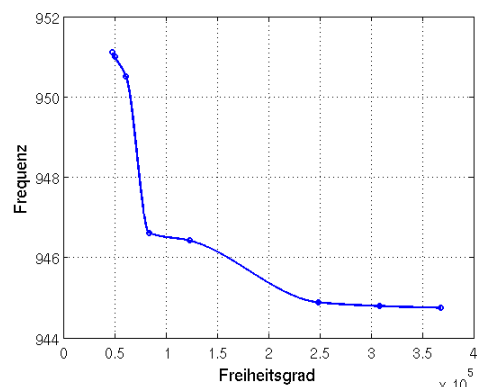


Abbildung 2: Konvergenz von b''.

Die Modalanalyse wurde für alle spielbaren Töne, ausgeschlossen derer mit halbgeöffneten Tonlöchern, durchgeführt und lieferte für die verschiedenen Töne ähnlich gute Ergebnisse wie bei der hier gezeigten Note b''.

## Modalanalyse mit Strömung

Die Galbrungleichung kann analog zu den an der TU Dresden durchgeführten Studienarbeiten von Frau Weißbecker und Herrn Dietzsch hergeleitet werden. Dazu ist die Verwendung der gemischten Euler-Lagrange-Betrachtungsweise erforderlich. Ähnlich der Herleitung der skalaren Wellengleichung, werden dazu Impulsbilanz, Massebilanz und konstitutive Beziehungen benötigt.

Die Galbrungleichung kann sowohl als reine Verschiebungsformulierung als auch als gemischte Formulierung aus Druck und Verschiebung aufgestellt werden. Die reine Verschiebungsformulierung ist z.B. mit Lagrange- oder Raviart-Thomas-Elementen lösbar. Lagrangeelemente führen jedoch immer zum Auftreten von Scheinmoden. Raviart-Thomas-Elemente berücksichtigen nur die Normalenkomponente der Verschiebung auf dem Elementrand, daher sind diese auch nur bei nicht vorhandenem Strömungsprofil anwendbar. Alternativ kann die gemischte Formulierung der Galbrungleichung verwendet werden, unter Nutzung von Elementen die die *inf-sup*-Bedingung erfüllen.

Die schwache gemischte Formulierung der Galbrungleichung lautet [2, 4]

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p_1 + \int_{\Omega} \nabla p^* \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \cdot \nabla p_1 \\
 & - \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) \\
 & + i\omega \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) - i\omega \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w} \\
 & - \omega^2 \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w} \\
 & = - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^* \cdot \left[ \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right] + \int_{\Gamma} p^* (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) . \quad (2)
 \end{aligned}$$

Als finite Elemente verwenden wir Taylor-Hood-Tetraederelemente.

Im folgenden präsentieren wir ein einfaches Beispiel eines 3D Rohrs. Das Rohr hat eine Länge von 3,4 m, die Wand wird als schallhart angesehen und durch das Rohr strömt Luft mit konstanter Geschwindigkeit. Für dieses Beispiel kann man eine eindimensionale analytische Lösung ermitteln

$$f_n = \frac{c_0 n}{2l} (1 - Ma^2) \quad \text{mit} \quad Ma = \frac{v_0}{c_0} . \quad (3)$$

Aus dieser Gleichung ist leicht ersichtlich, dass die Frequenzen bei steigender Machzahl abnehmen. Unsere numerischen Berechnungen führen auf das gleiche Ergebnis.

Auffällig bei diesen Berechnungen ist, dass mit steigender Machzahl vermehrt Scheinmoden auftreten. In Abbildung 3 sind alle berechneten Eigenfrequenzen des Rohrs in der komplexen Ebene für verschiedene Machzahlen dargestellt. Die obere Darstellung zeigt die Frequenzen für  $Ma = 0,1$ , die untere für  $Ma = 0,9$ . In dieser Darstellung muss die unterschiedliche Skalierung der Imaginärachsen beachtet werden. Hierbei fällt auf,

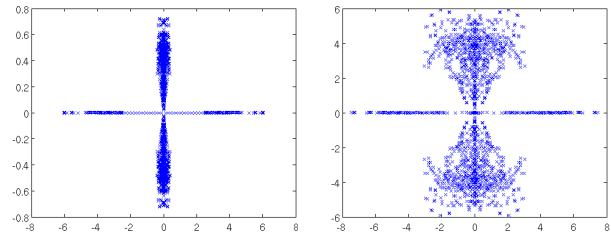


Abbildung 3: Eigenfrequenzen für  $Ma = 0,1$  (links) und  $Ma = 0,9$  (rechts).

dass bei steigender Machzahl die Menge und die Ausbreitung der Scheinmoden zunimmt. Während es bei nicht vorhandener Strömung nur rein reelle und rein imaginäre Scheinmoden gibt, reichen sie bei steigender Machzahl immer weiter in die komplexe Ebene hinein. Sind die tatsächlichen Eigenfrequenzen rein reell, wie es bei dem Rohrbeispiel der Fall ist, liegen die Scheinmoden aber nur außerhalb des Bereichs der tatsächlichen Frequenzen. Daher ist hier noch eine Unterscheidung zu den Scheinmoden möglich. Bei Außenraumproblemen wird aber vermutlich an dieser Stelle eine zusätzliche Schwierigkeit auftreten, da hier die gesuchten Eigenfrequenzen komplex sind.

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Autoren haben einen nichtkommerziellen Fortran 90 Code entwickelt mit dem große, schwach besetzte und unsymmetrische Matrizen berechnet werden können. Das aufgestellte quadratische Eigenwertproblem wird iterativ mittels eines Arnoldi-Algorithmus gelöst. Die Modalanalyse unter Verwendung der Galbrungleichung ist bisher nur für Innenraumprobleme mit verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten lösbar.

In einem nächsten Schritt werden die Randbedingungen für Ein- und Auslass implementiert. Weiterhin soll das charakteristische Strömungsprofil innerhalb der Blockflöte abgebildet werden. In diesem Zusammenhang soll die Anwendung der Galbrungleichung bei Außenraumproblemen erfolgen.

## Literatur

- [1] Astley, R. J.: Mapped spheroidal elements for unbounded wave problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 41 (1998), S. 1235–1254
- [2] Gabard, G.; Treysède, F.; Ben Tahar M.: A numerical method for vibro-acoustic problems with sheared mean flows. *J. Sound Vib.* 272 (2004), S. 991–1011
- [3] Ruge, P.: Eigenvalues of damped structures: Vector iteration in the original space of DOF. *Computational Mechanics* 22 (1998), S. 167–173
- [4] Treysède, F.; Ben Tahar M.: Comparison of a finite element model with a multiple-scales solution for sound propagation in varying ducts with swirling flows. *J. Acoust. Soc. Am.* 115 (2004), S. 2716–2730