

# Numerische Berechnung der Schallausbreitung in rotierenden Systemen mittels FEM auf nicht-konformen Gittern

J. Grabinger<sup>1</sup>, M. Kaltenbacher<sup>2</sup>, S. Becker<sup>3</sup>, R. Lerch<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl f. Sensorik, 91052 Erlangen, Deutschland, Email: jens@lse.eei.uni-erlangen.de

<sup>2</sup> Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Lehrstuhl f. Angewandte Mechatronik, 9020 Klagenfurt, Austria

<sup>3</sup> Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl f. Prozessmaschinen und Anlagentechnik, 91058 Erlangen, Deutschland

## Einleitung

Bei der Produktentwicklung von Lüftern und Pumpen spielt die Geräuschminderung eine immer wichtigere Rolle. Oft werden numerische Methoden zur Berechnung von Wirkungsgrad und Lärmemission eingesetzt, um Kosten für den Bau von Prototypen zu reduzieren. Das am häufigsten verwendete Verfahren zur Berechnung der Abstrahlung von strömungsinduziertem Schall ist das sog. *Ffowcs Williams-Hawkings-Verfahren*. Neben dem Vorteil eines vergleichsweise geringen Berechnungsaufwands hat dieses Verfahren jedoch den Nachteil, dass Hindernisse im Schallausbreitungsgebiet nicht berücksichtigt werden können. Dies hat zur Folge, dass oftmals nur das Laufrad betrachtet wird, nicht aber das Gehäuse des Lüfters. Ziel dieser Arbeit ist daher die Entwicklung eines numerischen Verfahrens, das sowohl die mit dem Laufrad rotierenden Schallquellen als auch die Reflexionen des Schalls am Gehäuse und am Laufrad korrekt abbildet.

## Finite-Elemente-Methode (FEM)

### Strömungsinduzierter Schall

Zur Berechnung des strömungsinduzierten Schalls wird eine Finite-Elemente-Diskretisierung der Lighthillschen Analogie verwendet. Die inhomogene Wellengleichung für den Schalldruck  $p$  lautet nach Lighthill

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1)$$

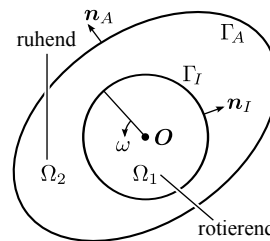
wobei  $c_0$  die mittlere Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Der Lighthill-Tensor kann durch  $T_{ij} \approx \rho_0 u_i u_j$  approximiert werden (unter Annahme von isentroper Strömung und kleiner Machzahl). Hier bezeichnet  $\rho_0$  die mittlere Dichte des Mediums und  $u_i$  die  $i$ -te Komponente des Geschwindigkeitsvektors. Die für die FEM benötigte *Variationsformulierung* erhält man, indem man Gleichung (1) mit einer Testfunktion  $w$  multipliziert und anschließend über das Berechnungsgebiet  $\Omega$  integriert [1]

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} w \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \, d\Omega. \quad (2)$$

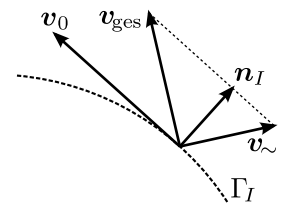
Hier bezeichnet  $\Gamma$  den Rand des Berechnungsgebietes und  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor auf  $\Gamma$ . Das Randintegral über  $\Gamma$  wird für schallharte Wände üblicherweise zu Null gesetzt.

## Rotierende Systeme

Zur Berechnung der Abstrahlung von strömungsinduziertem Schall muss auf eine numerische Strömungsberechnung zurückgegriffen werden, aus der sich gemäß der oben genannten Gleichungen aeroakustische Quellen extrahieren lassen. Die so berechneten Quellen sind relativ zu dem Bezugssystem zu verstehen, das bei der Strömungsberechnung verwendet wird. Somit ergeben sich Quellterme, die sich im Laufrad auf ein rotierendes Koordinatensystem beziehen, im restlichen Volumen dagegen auf ein ruhendes. Um auch die Schallausbreitung gleichzeitig im rotierenden und im ruhenden Bezugssystem zu berechnen, wird in dieser Arbeit eine Gebietszerlegung am Finite-Elemente-Modell vorgenommen (siehe Abb. 1). Das Teilgebiet des Laufrads sei mit  $\Omega_1$  bezeichnet, dessen Bezugssystem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um das Zentrum  $O$  rotiert. Die Rotation wird durch den Operator  $r_t$  beschrieben. Im Teilgebiet  $\Omega_2$  wird ein ruhendes Bezugssystem verwendet. Durch die Gebietszerlegung entsteht zusätzlich zum äußeren Rand  $\Gamma_A$  auch ein innerer Rand  $\Gamma_I$  an der Schnittfläche der beiden Teilgebiete. Rotierendes und nicht-rotierendes Luftvolumen



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung der Gebietszerlegung



**Abbildung 2:** Stetigkeit der Geschwindigkeit an der Schnittfläche

werden getrennt diskretisiert, so dass zwei völlig disjunkte Gebiete mit jeweils einer eigenen Lösungsfunktion  $p_1$  bzw.  $p_2$  entstehen. Der Austausch von Schallwellen zwischen den (im allgemeinen nicht-konformen) Gittern der beiden Gebiete wird durch Anwendung der sog. *Mortar-Methode* realisiert [2]. Dabei werden durch die zusätzlichen Gleichungen

$$\int_{\Gamma_I} (p_1(r_{-t}\mathbf{x}, t) - p_2(\mathbf{x}, t)) \mu \, d\Gamma = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Gamma_I} \left( \frac{\partial p_1(r_{-t}\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial p_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) \mu \, d\Gamma = 0 \quad (4)$$

die Stetigkeit und zeitliche Differenzierbarkeit der Lösungen  $p_1, p_2$  an der Schnittfläche  $\Gamma_I$  sichergestellt. Im rotierenden Fall muss auch die Stetigkeit der Gesamtgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{ges},1} \cdot \mathbf{n}_I \Big|_{\Gamma_I} = \mathbf{v}_{\text{ges},2} \cdot \mathbf{n}_I \Big|_{\Gamma_I} \quad (5)$$

gefordert werden, wobei  $\mathbf{v}_{\text{ges}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\sim}$  die vektorielle Summe aus der Umfangsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  des Laufrads und der Schallschnelle  $\mathbf{v}_{\sim}$  ist. Dies wird durch Einführung eines Lagrange-Multiplikators

$$\lambda := \mathbf{v}_{\sim} \cdot \mathbf{n}_I \Big|_{\Gamma_I} \quad (6)$$

erreicht. Hierbei ist die Schallschnelle  $\mathbf{v}_{\sim}$  ausreichend, da die Umfangsgeschwindigkeit an der Schnittfläche immer in tangentialer Richtung weist und somit nicht in die Normalkomponente eingeht (vgl. Abb. 2). Setzt man Gleichung (6) in die linearisierte akustische Bewegungsgleichung projiziert auf  $\Gamma_I$  ein, so ergibt sich

$$\rho_0 \frac{\partial \lambda}{\partial t} \Big|_{\Gamma_I} = - \frac{\partial p_1(r_{-t} \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}_I} \Big|_{\Gamma_I} = - \frac{\partial p_2(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}_I} \Big|_{\Gamma_I}, \quad (7)$$

was wiederum in das Randintegral in (2) substituiert wird. Die Stetigkeit der Schallschnelle ist somit gleichbedeutend mit der Differenzierbarkeit des Schalldrucks. Analog zu [3] wird mittels des inversen Rotationsoperators  $r_{-t}$  die Koordinate  $\mathbf{x}$  vom ruhenden in das rotierende Bezugssystem transformiert. Dies hat zur Folge, dass (3), (4) und (7) in jedem Zeitschritt neu berechnet werden müssen.

## Testfall zur Validierung

Als Testfall des vorgestellten Verfahrens wurde ein zweidimensionaler Schnitt durch ein stark vereinfachtes Radiallaufrad mit vier geraden Schaufeln berechnet (Abb. 3). Die Schaufeln sind 5 cm dick, beginnen bei einem Innenradius von 0,2 m und sind 0,6 m lang. Die Grenzfläche  $\Gamma_I$  zwischen rotierendem und ruhendem Bezugssystem liegt bei einem Radius von 1 m. Rund um das Laufrad befindet sich ein Gebiet aus ruhendem Medium mit einem Außenradius von 2 m. Um Freifeldbedingungen zu gewährleisten, wird auf dem Außenrand  $\Gamma_A$  eine absorbierende Randbedingung verwendet. An der inneren Spitze einer Schaufel befindet sich eine punktförmige monofrequente Quelle (250 Hz). Das Laufrad rotiert mit einer Drehzahl von  $2500 \text{ min}^{-1}$ , was einer Rotationsfrequenz von 41,7 Hz entspricht. Dadurch sollte sich aufgrund der bewegten Schallquelle der Doppler-Effekt beobachten lassen. Am Beobachtungspunkt würde man deshalb eine Dopplerverschiebung um die Rotationsfrequenz erwarten. Betrachtet man das Spektrum des berechneten Signals (Abb. 4), so lässt sich eine Dopplerverschiebung gegenüber der Grundfrequenz von  $\Delta f = \pm 41,8 \text{ Hz}$  ermitteln. Die Simulation stimmt also sehr gut mit dem erwarteten Ergebnis überein.

## Zusammenfassung

Es wurde eine Finite-Elemente-Methode zur Berechnung der Schallausbreitung in rotierenden Systemen vorge-

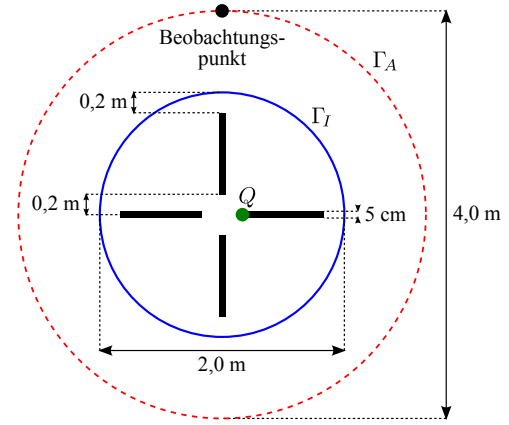


Abbildung 3: Skizze vom Berechnungsgebiet der Validierungsrechnung ( $Q$ : Quelle)

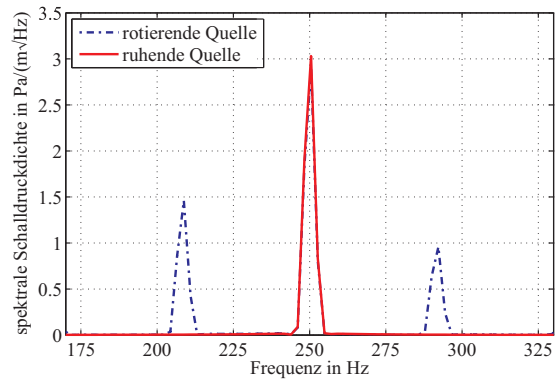


Abbildung 4: Dopplerverschobenes Spektrum aufgrund der Rotation der Quelle (Einheit Pa/m aufgrund 2D-Berechnung)

stellt. Zu diesem Zweck wurde eine Gebietszerlegung am numerischen Modell vorgenommen. Der Austausch von Schallwellen zwischen den beiden disjunkten Gebieten konnte durch Anwendung der sog. *Mortar-Methode* realisiert werden. Das Verfahren wurde anhand eines einfachen Radiallaufrads getestet.

## Danksagung

Die Autoren danken der Bayerischen Forschungsstiftung (BFS) für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des Forschungsverbundes „FORLärm“.

## Literatur

- [1] Kaltenbacher, M.; Escobar, M.; Ali, I.; Becker, S.: Numerical simulation of flow-induced noise using LES/SAS and Lighthill's acoustic analogy. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 63, Nr. 9 (2010), 1103–1122. doi:10.1002/fld.2123
- [2] Flemisch, B.; Kaltenbacher, M.; Wohlmuth, B. I.: Elasto-acoustic and acoustic-acoustic coupling on non-matching grids. *Int. J. Numerical Methods in Engineering* 67, Nr. 13 (2006), 1791–1810
- [3] Rapetti, F.; Santandrea, L.; Bouillault, F.; Razek, A.: Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids. *COMPEL* 19, Nr. 1 (2000), 10–29