Modellbildung der Schallausbreitung in wassergefüllten Rohrleitungen

Bernhard Karl Bachner
Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), 38116 Braunschweig, Deutschland, Email: bernhard.bachner@ptb.de

Einleitung

In Gebäuden aber auch in automotiven Anwendungen stellen Rohrleitungen mit kreisförmigem Querschnitt einen zumeist unerwünschten Übertragungspfad zur Schallausbreitung dar. Da Rohrleitungen eine sehr effiziente Fortleitung von Schall über große Distanzen ermöglichen, kann der Ort der Schallenstehung (Schallquelle) sehr weit vom Ort einer als störend empfundenen Schallabstrahlung (Schallsenke) entfernt sein, weshalb die Notwendigkeit von Gegenmaßnahmen zusätzlich an Bedeutung gewinnt.

Die Schallabstrahlung wird durch die Aufhängung der Rohrleitung an plattenförmigen Strukturen, wie sie in Gebäuden vorliegen, bewirkt. Die mehrfache Befestigung einer Rohrleitung an einer Plattenkonstruktion bildet gemeinsam mit der verzweigten Struktur der Rohrleitung selbst ein komplexes System, in welchem die Schallausbreitung durch einen netzwerkartigen Leistungsfluss gekennzeichnet ist.

Zur mathematischen Beschreibung der Schallausbreitung in Rohren stehen einerseits numerische Verfahren, die auf einer Diskretisierung eines komplex geformten Kontinuums beruhen, zur Verfügung. Die Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf Probleme der Fluid-Struktur-Kopplung in Rohrleitungen wird beisp. in [5] beschrieben. Haben die numerischen Methoden den Vorteil, eine weitgehende Berücksichtigung realer geometrischer Verhältnisse im Modell zu ermöglichen, so bedingt ein hoher Detailierungsgrad einen entsprechend hohen Rechenaufwand zur Problemlösung.

Demgegenüber stellen analytische Verfahren (siehe hierzu beisp. [2]) wesentlich geringere Ansprüche an die Rechenkapazität. Die Beschränkung dieser Verfahren auf Geometrien, die einer analytischen Lösung zugänglich sind, ist im Fall von Rohrleitungen in Gebäuden von geringer Relevanz, da für den Fall des geraden kreiszylindrischen Rohrs bei linear-akustischer Modellbildung eine entsprechende Lösung der Bewegungsgleichungen in Form eines Systems partieller Differenzialgleichungen durch einen Separationsansatz existiert [3].

Modellbildung

Die analytische Modellbildung zusammengesetzter Strukturen deren Bauteile eine ausgeprägte Vorzugsrichtung der Wellenausbreitung aufweisen, bedient sich verschiedener Formulierungen mittels Matrizengleichungen. Eine Einteilung dieser Formulierungen erfolgt gemäß den physikalischen Größen in den Zustandsvektoren, die durch die Matrix miteinander verknüpft werden. Am häufigsten wird in der Literatur die Verwendung von Kettenmatrizen [4, S. 353] beschrieben, welche sich sehr gut für Strukturen in Kaskadenform eignen. Diese Schreibweise ist auch Basis für die Modellbildung in [2]. In diesem Fall werden Zustandsvektoren, die messbare Größen (Kräfte, Verschiebungen, etc.) an jeweils einem Schnittufer eines Wellenleiters zusammenfassen, miteinander verknüpft. Kontinuierliche Wellenleiter- und diskrete Verbindungselemente werden dabei mit derselben Form von Matrix beschrieben.

Bei Strukturen mit netzwerkartiger Schallausbreitung (Schleifenstruktur) empfiehlt sich aber eine Formulierung, die für kontinuierliche und diskontinuierliche Elemente (Leitungs- bzw. Verbindungselemente) auf unterschiedliche Formen der Abbildungsgleichungen zurückgreift. Die Grundlagen dieser Formulierung sind für 1-dimensionale Wellenausbreitungsvorgänge ohne Fluid-Struktur-Kopplung in [1] beschrieben, weshalb im Folgenden nur die Ableitung der benötigten Matrizen für passive Wellenleiter mit Kopplung (ohne innere Schallquellen) skizziert wird.

Modellbildung der Leitungselemente

Jene Bauteile einer Rohrleitung, deren Längsabmessungen nicht mehr als klein gegenüber der betrachteten minimalen Wellenlänge λ_{min} angenommen werden können, sollen als Leitungselemente bezeichnet werden. Bei Beschränkung auf einen Frequenzbereich deutlich unterhalb der so genannten Ringfrequenz,

$$f_{ring} = \frac{c_s}{2\pi a} \qquad (1)$$

die aus der Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwellen im Rohrmantel (für Stahl $c_s \approx 5400\,\mathrm{m/s}$) und dem Rohrradius a erhalten wird, die bei Stahlrohren mit Nennweiten von 150 mm bei Frequenzen $f > 10\,\mathrm{kHz}$ zu liegen kommt, kann die gekoppelte Fluid-Struktur-Schwingung mit 4 Wellenarten beschrieben werden: eine quasilongitudinale Dehnwelle (Index e) entlang der Rohrlängsachse z, 2 Biegewellen um orthogonale Achsen des Rohrquerschnitts x und y (Index b,x und b,y) sowie eine Torsionswelle (Index t) um die Längsachse z. Lediglich am Anschluss von diskontinuierlichen Verbindungselementen wie Fittingen oder Rohraufhängungen können lokal komplexere Wellenformen auftreten, die eine Verformung des Kreisquerschnittes bewirken.

Die Bewegungsgleichungen aller 4 Wellenarten können nach Transformation in den Frequenzbereich durch jeweils ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

$$\mathbf{B}_i(\omega)\frac{\partial \underline{\boldsymbol{s}}_i}{\partial z}(\omega) = \mathbf{A}_i(\omega)\underline{\boldsymbol{s}}_i(\omega) \qquad (2)$$

mit symmetrischen Matrizen $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{B}_i$ beschrieben werden, wobei der Index i die Wellenart (e, b,x, b,y und

t) spezifiziert. Die Matrixkoeffizienten können im Einzelnen in [2, S. 29ff.] nachgesehen werden. Mit dem Lösungsansatz

$$\underline{\boldsymbol{s}}_i(z,\omega) = \boldsymbol{\psi}_i(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k(\omega)\,z} \tag{3}$$

erhält man aus dem Differenzialgleichungssystem ein verallgemeinertes Eigenwertproblem.

$$[\mathbf{A}_i(\omega) - \mathrm{j}\,\mathbf{B}_i(\omega)\,k_i(\omega)]\;\boldsymbol{\psi}_i(\omega) = \mathbf{0} \tag{4}$$

Die charakteristischen Polynome für die Logitudinal- und die Biegewellen sind von 4. Ordnung, und für die Torsionswelle ist das Polynom von 2. Ordnung, weshalb eine analytische Lösung möglich ist.

Die aus der Lösung der 4 Eigenwertprobleme erhaltenen Eigenpaare für die 4 Wellenarten $(k_i, \boldsymbol{\psi}_i)$ können für ausbreitungsfähige Moden nach dem Vorzeichen des Realteils des Eigenwerts $\Re(k_i)$ in zwei Mengen unterteilt werden. Evaneszente Moden werden je nach Vorzeichen des Imaginärteils des Eigenwerts $\Im(k_i)$ einer der beiden Mengen der ausbreitungsfähigen Moden zugeordnet.

$$\left\{\left(k_i^+, \boldsymbol{\psi}_i^+\right)\right\} = \{(k_i, \boldsymbol{\psi}_i)\,|\Re(k_i) < 0 \vee \Im(k_i) > 0\} \tag{5}$$

$$\left\{\left(k_i^-, \boldsymbol{\psi}_i^-\right)\right\} = \{(k_i, \boldsymbol{\psi}_i)\,|\Re(k_i) > 0 \vee \Im(k_i) < 0\} \tag{6}$$

Mit den Eigenvektoren der 4 Wellenarten lassen sich die so genannten Modalmatrizen $\boldsymbol{\Psi}_i^{\pm} = [\boldsymbol{\psi}_i^{\pm}]$ bilden, mit denen die beiden Modalmatrizen des Wellenleiters als Blockdiagonalmatrizen

$$\boldsymbol{\Psi}^+ = \mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\Psi}_e^+ \quad \boldsymbol{\Psi}_{b,x}^+ \quad \boldsymbol{\Psi}_{b,y}^+ \quad \boldsymbol{\Psi}_t^+\right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^- = \mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\Psi}_e^- \quad \boldsymbol{\Psi}_{b,x}^- \quad \boldsymbol{\Psi}_{b,y}^- \quad \boldsymbol{\Psi}_t^-\right) \tag{8}$$

erhalten werden. Mit Hilfe dieser Modalmatrizen kann nunmehr ein Wellenvektor definiert werden, der aus den komplexen Amplituden der fortschreitenden Wellen

$$\underline{\boldsymbol{s}}^+ = \left\{\underline{\boldsymbol{s}}_e^+ \quad \underline{\boldsymbol{s}}_{b,x}^+ \quad \underline{\boldsymbol{s}}_{b,y}^+ \quad \underline{\boldsymbol{s}}_t^+\right\}^\top \tag{9}$$

und der reflektierten Wellen

$$\underline{\boldsymbol{s}}^- = \left\{\underline{\boldsymbol{s}}_e^- \quad \underline{\boldsymbol{s}}_{b,x}^- \quad \underline{\boldsymbol{s}}_{b,y}^- \quad \underline{\boldsymbol{s}}_t^-\right\}^\top \tag{10}$$

besteht. Der Vektor der messbaren Zustandsgrößen wird aus dem neuen Wellenvektor mit Hilfe der Abbildung

$$\boldsymbol{s} = \left[\boldsymbol{\Psi}^+ \quad \boldsymbol{\Psi}^-\right] \begin{Bmatrix} \underline{\boldsymbol{s}}^+ \\ \underline{\boldsymbol{s}}^- \end{Bmatrix} \tag{11}$$

erhalten. Die Streumatrix $\mathbf{S}$ eines Wellenleiters [6, S. 35] beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor der an beiden Schnittufern mit den Längskoordinaten z_- und z_+ einfallenden Wellen $\underline{\boldsymbol{s}}^{\oplus} = \{\underline{\boldsymbol{s}}_-^+ \underline{\boldsymbol{s}}_+^-\}^\top$ und dem Wellenvektor der an beiden Schnittufern emittierten Wellen $\underline{\boldsymbol{s}}^{\ominus} = \{\underline{\boldsymbol{s}}_-^- \underline{\boldsymbol{s}}_+^+\}^\top$.

$$\underline{\boldsymbol{s}}^{\ominus} = \mathbf{S}\,\underline{\boldsymbol{s}}^{\oplus} \tag{12}$$

Für die Definition der Streumatrix ist es zweckmäßig, mit den Eigenwerten der 4 Wellenarten Diagonalmatrizen $\mathbf{K}_i^{\pm} = \mathrm{diag}\left(k_i^{\pm}\right)$ zu bilden. Die einzelnen Diagonalmatrizen werden dann zu den Gesamtdiagonalmatrizen

$$\mathbf{K}^+ = \mathrm{diag}\left(\mathbf{K}_e^+ \quad \mathbf{K}_{b,x}^+ \quad \mathbf{K}_{b,y}^+ \quad \mathbf{K}_t^+\right) \tag{13}$$

$$\mathbf{K}^- = \mathrm{diag}\left(\mathbf{K}_e^- \quad \mathbf{K}_{b,x}^- \quad \mathbf{K}_{b,y}^- \quad \mathbf{K}_t^-\right) \tag{14}$$

zusammengefasst. Mit der Länge des Wellenleiters $l = z_+ - z_-$ erhält man für die Streumatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,l\,\mathbf{K}^-} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,l\,\mathbf{K}^+} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ des Wellenleiters beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor der an beiden Schnittufern mit den Längskoordinaten z_- und z_+ einfallenden Wellen $\underline{\boldsymbol{s}}^{\oplus}$ und den an den beiden Schnittufern vorliegenden Zustandsvektoren $\boldsymbol{s}_-$ und $\boldsymbol{s}_+$ der messbaren Größen.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{s}_- \\ \boldsymbol{s}_+ \end{Bmatrix} = \mathbf{T}\,\underline{\boldsymbol{s}}^{\oplus} \tag{16}$$

Mit den oben definierten Modalmatrizen $\boldsymbol{\Psi}^+$ sowie $\boldsymbol{\Psi}^-$ und der Streumatrix $\mathbf{S}$ erhält man für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,l\,\mathbf{K}^-} \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,l\,\mathbf{K}^+} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Zusammenfassung

Mit der Streumatrix $\mathbf{S}$ und der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ liegt die vollständige Beschreibung eines Wellenleiters vor, die durch den Wechsel von Zustandsvektoren aus messbaren Zustandsgrößen $\underline{\boldsymbol{s}}$ zu Wellenvektoren für die in den Wellenleiter einfallenden Wellen $\underline{\boldsymbol{s}}^{\oplus}$ und die aus dem Wellenleiter emittierten Wellen $\underline{\boldsymbol{s}}^{\ominus}$ in besonderer Weise für die Modellbildung von akustischen Netzwerken geeignet ist.

Gegenüber der herkömmlichen Anwendung von Kettenmatrizen ergibt sich eine Halbierung der Zahl der Freiheitsgrade, da für die Verbindungselemente keine zusätzlichen Unbekannten eingeführt werden müssen, wodurch eine Beschleunigung der numerischen Lösung erzielt wird.

Literatur

[1] B. K. Bachner. A systematic approach for linear acoustic modelling of complex silencer systems. *Proc. of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13)*, Vienna, Austria, 2006.

[2] C. A. F. de Jong. *Analysis of Pulsations and Vibrations in Fluid-Filled Pipe Systems.* Dissertation, Eindhoven University of Technology, 1994.

[3] W. Flügge. *Stresses in Shells.* Springer-Verlag, Berlin, 4. Aufl., 1967.

[4] S. Ghosh. *Network Theory: Analysis and Synthesis.* Prentice-Hall of India, New Delhi, 2005.

[5] M. Maess. *Methods for Efficient Acoustic-Structure Simulation of Piping Systems.* Dissertation, Universität Stuttgart, 2006.

[6] R. Mavaddat. *Network Scattering Parameters.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, River Edge, N.J., 1996.