

Modalanalyse eines strömenden Fluids mit finiten und infiniten Elementen

Stefanie Retka¹, Steffen Marburg¹

¹ Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, UniBw München, Neubiberg, Deutschland, Email: stefanie.retka@unibw.de

Einleitung

Der beim Spielen einer Blockflöte in das Instrument eingebrachte Luftstrom sorgt für die Klangerzeugung, indem er die Luftsäule im Inneren des Instruments zum Schwingen anregt. Dabei ermöglichen leichte Veränderungen der Anblasgeschwindigkeit eine Feinabstimmung des Klangs.

Diese Effekte werden mithilfe einer numerischen Modalanalyse des Fluids innerhalb und um eines Blockflötenmodells überprüft. Hierbei wird die Galbrungleichung verwendet, da mit ihr Strömungen in Frequenzbereichsberechnungen berücksichtigbar sind. Zunächst wird ein beidseitig geöffnetes Rohr berechnet, durch welches eine konstante Strömung fließt. Die Theorie besagt, dass eine konstante Strömung die Eigenfrequenzen des Fluids senkt. Dies wird im Folgenden gezeigt. Anschließend erfolgt die Betrachtung des Fluidmodells der Blockflöte. Beim Spielen einer Blockflöte bemerkt man, dass sich der Ton erhöht, wenn die Anblasgeschwindigkeit erhöht wird. Diese Beobachtung steht im Gegensatz zum Absinken der Eigenfrequenzen bei konstanter Strömung. Das legt die Vermutung nahe, dass das bei dem Instrument auftretende turbulente Strömungsprofil für dieses Verhalten verantwortlich ist.

In diesem Artikel wird in einem ersten Schritt die verwendete Galbrun-Gleichung beschrieben, bevor sie auf die beiden zuvor beschriebenen Beispiele angewandt wird.

Galbrun-Gleichung

Es gibt verschiedene Literatur, die sich mit der Herleitung der Galbrun-Gleichung auseinandersetzt. Hier wird die Herleitung analog zu Godin verwendet [1]. Dazu ist die Verwendung der gemischten Euler-Lagrange-Betrachtungsweise erforderlich. Ähnlich der Herleitung der skalaren Wellengleichung, werden dazu Impulsbilanz, Massenbilanz und konstitutive Beziehungen benötigt. In der Herleitung wird die Annahme getroffen, dass die Fluidbewegung durch eine zeitunabhängige Umgebungsströmung und eine überlagerte Welle kleiner Amplitude verursacht wird. Weiterhin wird ein ideales Fluid betrachtet. Dabei werden keinerlei angreifende Kräfte berücksichtigt. Impulsbilanz (1), Massenbilanz (2) und konstitutive Beziehung (3) in Abhängigkeit von der oszillierenden Verschiebung lauten

$$\frac{d^2 \mathbf{w}}{dt^2} - \mathbf{w} \cdot \nabla \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0} + \frac{\rho_1 \nabla p_0}{\rho_0^2} \quad (1)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\nabla \cdot \mathbf{w} + \frac{\rho_1 + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (2)$$

$$p_1 + \mathbf{w} \cdot \nabla p_0 = c_0^2 (\rho_1 + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho_0) \quad (3)$$

Die Galbrun-Gleichung kann sowohl als reine Verschiebungsformulierung als auch als gemischte Formulierung aus Druck und Verschiebung aufgestellt werden. Die reine Verschiebungsformulierung ist z.B. mit Raviart-Thomas-Elementen lösbar. Raviart-Thomas-Elemente berücksichtigen jedoch nur die Normalenkomponente der Verschiebung auf dem Elementrand, daher sind diese auch nur bei nicht vorhandenem Strömungsprofil anwendbar. Alternativ kann die gemischte Formulierung der Galbrun-Gleichung verwendet werden, unter Nutzung von Elementen die die *inf-sup*-Bedingung erfüllen [2, 3]. Die schwache gemischte Formulierung der Galbrun-Gleichung lautet [4, 5]

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p^* p_1 + \int_{\Omega} \nabla p^* \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \cdot \nabla p_1 \\ & - \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) \\ & - i\omega \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}) + i\omega \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \mathbf{w} \\ & - \omega^2 \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w} \\ & = - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^* \cdot \left[\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right] + \int_{\Gamma} p^* (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) . \quad (4) \end{aligned}$$

In der numerischen Analyse werden Taylor-Hood-Elemente verwendet. Bei den finiten Elementen handelt es sich um Tetraederelemente. Um die Abstrahlung in den Außenraum abzubilden, kommen komplex konjugierte, infinite Astley-Leis-Elemente zur Anwendung [6].

Anwendung - gerades Rohr

In diesem Anwendungsbeispiel wird ein gerades Rohr verwendet, welches an beiden Enden geöffnet ist. Im gesamten Berechnungsgebiet ist eine parallel zur Rohrlängsachse fließende Strömung vorhanden. Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse der Modalanalyse in Abhängigkeit von der Machzahl. Bei den dargestellten Eigenwerten ent-

Tabelle 1: Numerische Ergebnisse des Rohrs bei konstanter Strömungsgeschwindigkeit v_{0z} , in Abhängigkeit der Machzahl $Ma = \frac{v_{0z}}{c_0}$.

Machzahl Ma	$v_{0z} \left[\frac{m}{s} \right]$	Eigenwert $[Hz]$
0	0	$-1,470 + 95,830i$
$1 \cdot 10^{-4}$	0,034	$-1,343 + 94,413i$
$1 \cdot 10^{-3}$	0,34	$-0,193 + 93,070i$
0,01	3,4	$-0,033 + 90,712i$
0,1	34	$-0,019 + 87,728i$

spricht der Realteil der Dämpfung und der Imaginärteil der Eigenfrequenz.

Aus der Tabelle ist entnehmbar, dass die Eigenfrequenzen bei steigender Strömungsgeschwindigkeit absinken. Dieser Effekt wurde erwartet und kann auch analytisch im Fall des eindimensionalen Rohrs nachgewiesen werden.

Anwendung - Blockflöte

Um das charakteristische Strömungsprofil innerhalb und im Nahfeld des Instruments im Rahmen der Modalanalyse zu berücksichtigen, wurden CFD-Daten der untersuchten Sopranblockflöte genutzt und auf das verwendete FE-Netz interpoliert. Im Folgenden werden die Ergebnisse zweier Töne mit sehr unterschiedlicher Griffkombination präsentiert. Dabei handelt es sich um c'' und d''' . Abbildung 1 zeigt die verwendeten CFD-Daten in Flötenlängsrichtung der beiden Töne. Tabelle 2 zeigt die

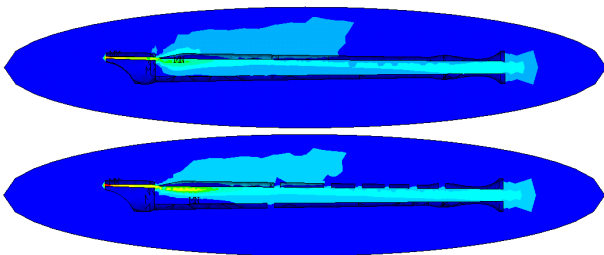


Abbildung 1: Strömung in Flötenlängsrichtung, c'' (oben) und d''' (unten).

Ergebnisse der Galbrun-Gleichung im statischen Fall, sowie unter Berücksichtigung der Strömung. Zum Vergleich dazu, sind die als exakt angenommenen Eigenfrequenzen, enthalten aus der MIDI-Tabelle, dargestellt.

Tabelle 2: Gegenüberstellung der Lösungen von Galbrun- und Helmholtzgleichung im Vergleich zur exakten Eigenfrequenz.

	c'' [Hz]	res_{rel} [%]
Galb. ohne CFD	$-0,234 + 536,165i$	2,004
Galb. mit CFD	$-0,225 + 519,129i$	1,237
exakt	525,630	
	d''' [Hz]	res_{rel} [%]
Galb. ohne CFD	$-1,719 + 1230,018i$	4,239
Galb. mit CFD	$-1,704 + 1221,322i$	3,502
exakt	1179,998	

Auffällig ist, dass der eingangs erwartete Effekt einer Eigenfrequenzerhöhung bei vorhandener rotationsbehafteter Strömung nicht auftritt. Stattdessen ist eine deutliche Konvergenz zum exakten Wert zu beobachten. Die Ursache hierfür liegt darin begründet, dass die Eigenfrequenz des ruhenden Fluids nicht mit der Resonanzfrequenz des strömenden Mediums übereinstimmt. Daher sind weitergehende Untersuchungen notwendig, um den Einfluss der Strömung genauer zu untersuchen.

Um einen linearen Anstieg der Strömungsgeschwindigkeit zu vermeiden, wird lediglich in einem kleinen Bereich am Labium die Strömungsgeschwindigkeit erhöht. Hierzu wird die Funktion einer Glockenkurve über diesen Bereich gelegt. Diese Funktion hat ein Maximum in ihrem Zentrum und fällt am Rand auf den Wert Eins, um einen

kontinuierlichen Übergang zu gewährleisten. Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse für den Ton d''' . V. steht dabei für Variante. In der Variante b) wurde ein etwas größerer Bereich als zuvor betrachtet, in der Variante c) war der Bereich etwas kleiner.

Tabelle 3: Gegenüberstellung der Ergebnisse unter Verwendung der originalen CFD-Daten und der lokal erhöhten Geschwindigkeitswerte.

	d''' [Hz]
originale CFD-Daten	$-1,704 + 1221,322i$
erhöhtes v_0 , Faktor 2	$-1,705 + 1221,396i$
erhöhtes v_0 , Faktor 3	$-1,705 + 1221,476i$
erhöhtes v_0 , Faktor 2, V. b)	$-1,704 + 1221,303i$
erhöhtes v_0 , Faktor 2, V. c)	$-1,706 + 1221,680i$

In der Tabelle ist ein leichter Effekt der Tonerhöhung nachweisbar. Dieser ist jedoch minimal und deutet darauf hin, dass weitere als die hier betrachteten Effekte eine Rolle bei der Tonerzeugung spielen.

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein nichtkommerzieller Fortran 90 Code mit dem Namen EVALSAGE zur Modalanalyse unter Berücksichtigung rotationsbehafteter Strömungen entwickelt. Damit ist die Lösung der Galbrun-Gleichung für dreidimensionale Außenraumprobleme unter Einbeziehung von Strömungsprofilen möglich.

Es muss überprüft werden, ob zusätzliche Effekte eine Rolle bei der Tonentstehung spielen, die Einfluss auf die Intonation des Instruments haben. Denkbar wären weitere Effekte aus der CFD-Analyse oder auch eventuelle viskothermische Verluste.

Literatur

- [1] Godin, O. A.: Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid. Wave Motion 25 (1997), S. 143–167
- [2] Barjau, A.; Keefe, D.; Cardona, S.: Time-domain simulation of acoustical wave-guides with arbitrarily spaced discontinuities. Journal of the Acoustical Society of America 105 (1999), Nr. 3, S. 1951–1964
- [3] Brezzi, F.; Fortin, M.; Brezzi, F. (Hrsg.); Fortin, M. (Hrsg.): Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991
- [4] Gabard, G.; Treysède, F.; Ben Tahar M.: A numerical method for vibro-acoustic problems with sheared mean flows. J. Sound Vib. 272
- [5] Treysède, F.; Ben Tahar M.: Comparison of a finite element model with a multiple-scales solution for sound propagation in varying ducts with swirling flows. J. Acoust. Soc. Am. 115 (2004), S. 2716–2730 (2004), S. 991–1011
- [6] Astley, R. J.: Mapped spheroidal elements for unbounded wave problems. Int. J. Num. Meth. Eng. 41 (1998), S. 1235–1254