# Analytische Approximation des hysteretischen Modells von Bouc auf Basis der Gaussian Closure Technik

Holger Waubke

*Institut für Schallforschung, Österreichische Akademie der Wissenschaften*
*Wohllebengasse 12-14, A-1040 Wien, E-Mail: holger.waubke@oeaw.ac.at*

## Einleitung

Bouc hat sehr früh eine Beschreibung eines hysteretischen Materialverhaltens mittels generalisierter Funktionen gefunden [1]. Mittels solcher Funktionen kann die Systemantwort eines dynamischen, hysteretischen Modells auf eine Rauschanregung beschrieben werden. Man erhält eine Gleichung, wie sie von Kolmogorov beschrieben wurde [2]. Da eine analytische Lösung nicht möglich ist, werden häufig iterative Methoden verwendet. Beliebt sind iterative Methoden auf Basis der statistischen Linearisierung und verwandter Verfahren. Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit eine weitgehend analytische Lösung vorgestellt werden, die auf der Gaussian Closure basiert [3]. Die Integrale der Closure Technik werden analytisch gelöst und es verbleibt nur noch die Iteration über einen Satz von nichtlinearen Gleichungen für die Bestimmung der Momente des stationären Zustands. Der instationäre Einschwingvorgang kann durch ein Zeitschrittverfahren ebenfalls rasch bestimmt werden.

## Hysteretisches Modell nach Bouc

Bouc [1] hat eine mathematische Beschreibung eines hysteretischen Modells entwickelt. Diese lässt sich in Form der Gleichung 1 wiedergeben.

$$\dot z = A\dot x - \gamma|\dot x|z - \vartheta\dot x|z| \tag{1}$$

In der Gleichung ist $z$ eine spannungsproportionale Verformung und $x$ die Gesamtverformung des Systems. $A$, $\gamma$ und $\vartheta$ sind wählbare Parameter der Hysterese. Nimmt man eine zyklische Gesamtverformung an, so kann man die Hysterese mit Gleichung 2 beschreiben.

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) \tag{2}$$

In Abbildung 1 ist die Hysterese für gewählte Parameter wiedergegeben.

Im Weiteren wird ein dynamisches System mit einem Freiheitsgrad $x$ exemplarisch behandelt (Gleichung 3).

$$m\cdot\ddot x(t) + c\cdot\dot x(t) + (1-\alpha)k\cdot x(t) + \alpha k\cdot z(t) = F(t) \tag{3}$$

$m$, $c$ und $k$ sind Masse, Dämpfung und Steifigkeit des Systems. Mit Hilfe von $\alpha \in [0,1$kann die Steifigkeit in einen linearen und einen hysteretischen Anteil unterteilt werden. Der lineare Anteil wird benötigt um ein Driften des Modells zu vermeiden. $F$ ist die Belastung des Modells. Im weiteren wird davon ausgegangen, dass $F$ ein weißes Rauschen ist.

## Gaussian Closure

Für die Bestimmung der Gleichungen der Gaussian Closure Methode ist es erforderlich eine explizite Vektordifferentialgleichung erster Ordnung aufzustellen. Aus Gleichung 1 und 3 erhalten wir, wenn man die Schnelle $y$ als zusätzliche Variable einführt Gleichung 4.

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{c}{m}y - \frac{k\alpha}{m}x - \frac{k(1-\alpha)}{m}z + F(t) \\ Ay - \gamma yz\,\mathrm{sgn}(y) - \vartheta\, yz\,\mathrm{sgn}(z)\end{bmatrix} \tag{4}$$

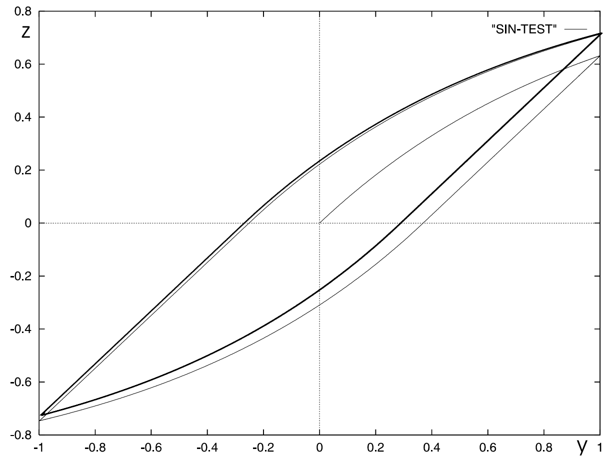


**Abbildung 1: Hysterese nach Bouc für $\omega$=1,5 , $y_0$=1 , A=1 , $\gamma$=0,5 , $\vartheta$ =0,5**

Verwendet man den Ito Ansatz und eine dreidimensionale Gaußverteilung $p_{X,Y,Z}$, so erhält man Gleichung 6 der Momente [3]. In Gleichung 6 werden die Momente $m$ der Gaußverteilung und die Potenzen $a_1$, $a_2$ und $a_3$, die aus der Gewichtung des Gleichungssystems vor der Integration über den stochastischen Raum verwendet (Gleichung 5).

$$\Phi(x,y,z) = x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} \quad , \quad a_1, a_2, a_3 \in N_0 \tag{5}$$

Die beiden Integrale $I_1$ und $I_2$ lassen sich mittels symbolischer Algebra Programme analytisch lösen. Da man annimmt, dass $p_{X,Y,Z}$ eine Gaußverteilung besitzt ist es erforderlich die Koeffizienten $a_1$, $a_2$ und $a_3$ bis zur zweiten Potenz zu variieren. $K$ gibt die Intensität des weißen Rauschens an. Für den stationären Fall gilt, dass die zeitliche Ableitung des Momentes Null ist (Gleichung 7). Die Integrale $I_1$ und $I_2$ sind für den mittelwertfreien Fall in Gleichung 7-15 angegeben [4].

$$\dot{m}_{a_1,a_2,a_3} = -\frac{c}{m} a_2 m_{a_1,a_2,a_3} + a_1 m_{a_1-1,a_2+1,a_3} - \frac{k\alpha}{m} a_2 m_{a_1+1,a_2-1,a_3} - \frac{k(1-\alpha)}{m} a_2 m_{a_1,a_2-1,a_3+1} + \frac{K}{2m^2} a_2 (a_2-1) m_{a_1,a_2-2,a_3} + A a_3 m_{a_1,a_2+1,a_3-1} - \gamma a_3 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{a_1} y^{a_2+1} z^{a_3} \operatorname{sgn}(y) p_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dxdydz}_{I_1} - \vartheta a_3 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{a_1} y^{a_2+1} z^{a_3} \operatorname{sgn}(z) p_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dxdydz}_{I_2} \quad (6)$$

$$\dot{m}_{a_1,a_2,a_3} = 0 \quad (7)$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (0,0,0) \quad (8)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{E(YY)},\ I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(YZ)}{\sqrt{E(ZZ)}}$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \quad (9)$$
$$I_1 = 0,\ I_2 = 0$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (2,0,0) \quad (10)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(XY)^2 + E(YY)\left(E(X)^2 + E(XX)\right)}{\sqrt{E(YY)}}$$
$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{2E(XZ)E(XY) + E(YZ)E(XX) - \frac{E(XZ)^2 E(YZ)}{E(ZZ)}}{\sqrt{E(ZZ)}}$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (0,2,0) \quad (11)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{E(YY)}E(YY)$$
$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(YZ)\left(3E(ZZ)E(YY) - E(YZ)^2\right)}{E(ZZ)\sqrt{E(ZZ)}}$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (0,0,2) \quad (12)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(YY)E(ZZ) + E(YZ)^2}{\sqrt{E(YY)}}$$
$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{E(ZZ)}E(YZ)$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (1,1,0) \quad (13)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{E(YY)}E(XY)$$
$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{2E(YZ)E(XY) + E(XZ)E(YY) - \frac{E(YZ)^2 E(XZ)}{E(ZZ)}}{\sqrt{E(ZZ)}}$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (1,0,1) \quad (14)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(YY)E(XZ) + E(XY)E(YZ)}{\sqrt{E(YY)}}$$
$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(ZZ)E(XY) + E(XZ)E(YZ)}{\sqrt{E(ZZ)}}$$

$$(a_1,a_2,a_3) = (0,1,1) \quad (15)$$
$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{E(YY)}E(YZ)$$
$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{E(ZZ)E(YY) + E(YZ)^2}{\sqrt{E(ZZ)}}$$

Die zugehörigen Momente werden in Gleichung 16 definiert.

$$m_{0,0,0} = 1 \quad (16)$$
$$m_{1,0,0} = 0 \quad m_{0,1,0} = 0 \quad m_{0,0,1} = 0$$
$$m_{2,0,0} = E(XX) \quad m_{0,2,0} = E(YY) \quad m_{0,0,2} = E(ZZ)$$
$$m_{1,1,0} = E(XY) \quad m_{1,0,1} = E(XZ) \quad m_{0,1,1} = E(YZ)$$

## Einfreiheitsgradsystem

Zum Vergleich werden die Ergebnisse der Gaussian Closure für den stationären Fall mit Monte-Carlo Simulationen in Tabelle 1 verglichen.

**Tabelle 1:** Vergleich Monte-Carlo Simulation und Gaussian Closure für ein Einfreiheitsgradsystem

| K=1,0 | MC Simulation | Gaussian-Closure |
|---|---|---|
| E(XX) | 3,25235 | 3,22657 |
| E(YY) | 1,98388 | 1,90216 |
| E(ZZ) | 0,49542 | 0,36358 |
| E(XY) | 0,00017 | 0,00000 |
| E(XZ) | 0,71890 | 0,57775 |
| E(YZ) | 0,60168 | 0,61957 |

## Literatur

[1] Bouc, R.: Forced Vibrations of a Mechanical System with Hysteresis (abstract), Proceedings of the 4th Conference on Nonlinear Oscillations, Prag, 1967, pp.315

[2] Kolmogorov, A.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Annalen, Band 104, Springer, Berlin, 1931, pp. 415-458

[3] Caughey, T.K.; Dienes, J.K: Analysis of a Nonlinear First-Order System with a White Noise Input, Journal of applied Physics, Vol.33 No.11 Nov. 1961, pp. 2476-2479

[4] Waubke, H. : Moment-Closure Technik zur Abschätzung der elasto-plastischen Reaktion von Stockwerksrahmen auf zufällige Belastungen aus Windereignissen, Habilitation, Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, TU München, 1/1999