

Eine akustische zweidimensionale Umsetzung der Fast-Multipol-Methode mit Matlab

¹Christian Steuck, ²Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik, 13353 Berlin, Deutschland.

E-Mail: ¹steuck@beuth-hochschule.de, ²piscoya@beuth-hochschule.de

Einleitung

Die Boundary-Elemente-Methode (BEM) in der Akustik erfordert im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode (FEM) lediglich eine Diskretisierung der Oberfläche der schallstreuenden oder -abstrahlenden Struktur. Die Fast-Multipol-Methode (FMM) bietet eine schnelle und speicherplatzsparende Möglichkeit zur approximativen Bildung von Matrix-Vektor-Produkten. Das vorgestellte Matlab-Tool kombiniert beide Methoden; eine partielle Auswertung im Voraus ermöglicht eine Abschätzung des erwarteten Fehlers.

Boundary-Elemente-Methode und Multipol-Methode

Die Boundary-Elemente-Methode basiert auf der Lösung der Kirchhoff'schen Integralgleichung

$$\frac{1}{2}p(y_j) = \int_{\Gamma} \left(p(x_i) \frac{\partial G(x_i, y_j)}{\partial n_{y_j}} + i\omega v G(x_i, y_j) \right) d\Gamma \quad (1)$$

$$\text{mit } G(x_i, y_j) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|x_i - y_j|), \quad \omega = k/c. \quad (2)$$

(Hankelfunktion zweiter Art $H_m^{(2)}$) für die komplexe Schalldruckamplitude p bzw. Normal-Schallschnelle-Amplitude v_n an den Orten x_i, y_j durch Diskretisierung der Randkurve Γ des Streukörpers bzw. Innenraums in N Linienelemente. Es entstehen $(N \times N)$ -Gleichungssysteme, wobei N mit der Frequenz ω wächst, da für hohe Frequenzen feiner diskretisiert werden muss. Zunächst werden entlang Γ kreisförmige Cluster definiert, sodass jeder Kurvenpunkt eindeutig einem Cluster zugeordnet ist.

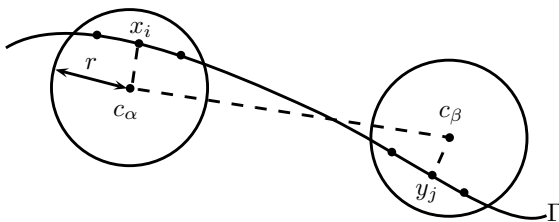


Abbildung 1: Wohlseparierte Cluster, Zentren c_α und c_β .

Ist der Abstand zweier Clustermitten c_α und c_β größer als $3r$, heißen die beiden Cluster *wohlsepariert* (Abbildung 1), und die Multipolmethode lässt sich durch nachfolgende Zerlegung anwenden.

Mit dem Graf'schen Additionstheorem ([1, Gln. 9.1.79, 9.1.21]) lässt sich der Kern $G(x_i, y_j)$ approximieren als Produkt dreier Funktionen, die jeweils nur von den

Abständen $x_i - c_\alpha$, $c_\alpha - c_\beta$ und $c_\beta - y_j$ abhängen (Abbildung 1):

$$G(x_i, y_j) = \sum_{l=1}^L f_l(k(x_i - c_\alpha)) b_l(k(c_\alpha - c_\beta)) \times f_l^*(k(y_j - c_\beta)), \quad (3)$$

$$b_l(x) \approx \frac{1}{4i} \sum_{m=-M}^M \frac{i^m}{2M+1} H_m^{(2)}(|x|) e^{-im(\theta_x - \frac{2\pi l}{2M+1})}, \quad (4)$$

$$f_l(x) = e^{ix \cdot \hat{s}(\theta_l)} \quad (5)$$

mit $\hat{s}(\theta_l) = (\cos \theta_l, \sin \theta_l)$, $\theta_l = 2\pi l / (2M + 1)$; θ_x bezeichnet den Polarwinkel des Ortsvektors x [2]. Der Abbruchparameter M heißt *Ordnung der Multipolentwicklung* oder einfach *Multipolordnung*.

Einsetzen der Multipolentwicklung (3), (4), (5) in die Integralgleichung (1) liefert für die Cluster α und β die Matrix-Ausdrücke

$$(U^\alpha)_{il} = f_l(k(x_i - c_\alpha)), \quad (6)$$

$$(B_\beta^\alpha)_{lm} = b_l(k(c_\alpha - c_\beta)) \delta_{lm}, \quad (7)$$

$$(V_\beta)_{mj} = \int_{\Gamma_\beta} f_m^*(k(y_j - c_\beta)) d\Gamma, \quad (8)$$

$$(dV_\beta)_{mj} = \int_{\Gamma_\beta} \frac{\partial f_m^*(k(y_j - c_\beta))}{\partial n_{y_j}} d\Gamma. \quad (9)$$

Zur Lösung des Gesamtsystems werden alle U^α zu einer Matrix U zusammengefasst, B_β^α , V_β und dV_β werden analog behandelt. Der Geschwindigkeitsvorteil der Methode ergibt sich daraus, dass die Funktionen $b_l(k(c_\alpha - c_\beta))$ für eine Vielzahl von Elementpaaren x_i und y_j gleich sind und daher nur einmal berechnet werden müssen. U , B , V und dV sind außerdem dünn besetzt und gestatten schnelle Matrix-Vektor-Multiplikationen, was iterative Lösungsverfahren beschleunigt, die viele solche Multiplikationen ausführen.

Die Einsparung von Speicherbedarf und Rechenoperationen ist am größten, wenn man die N Elemente in $T \approx \sqrt{N}$ Cluster einteilt, die jeweils $n_c \approx \sqrt{N}$ Elemente enthalten. Der Speicherbedarf wächst dann wie $\mathcal{O}(N^{3/2})$ gegenüber $\mathcal{O}(N^2)$ ohne Multipolmethode.

Für benachbarte Cluster ist eine herkömmliche Berechnung durch Diskretisierung von (1) nötig, die Systemmatrix A ist also aufzuspalten in $A = A_{nah} + A_{fern}$, wobei die „Fernfeldmatrix“ A_{fern} je nach Randbedingungen $A_{fern} = UBdV$ bzw. $A_{fern} = UV$ ist.

Umsetzung in Matlab

In einer Benutzeroberfläche lassen sich neben Frequenz und Elementgröße die Lösungsverfahren GMRES, CGS und BICGSTAB auswählen. Alle Verfahren rufen dieselbe Funktion zur Multiplikation von A_{fern} mit Zwischenlösungs-Vektoren auf. Zentraler Parameter ist die Multipolordnung M , die den Abbruch der Reihe in (4) bestimmt. Die Konvergenz dieser Reihe ist desto schlechter, je kleiner der Clustermitten-Abstand $|c_\alpha - c_\beta|$. Daher wurde vor jeder Rechnung für zwei benachbarte „Probe-Cluster“ der Wert der Funktionen $G(x_i, y_j)$ und $\frac{\partial G(x_i, y_j)}{\partial n_{y_j}}$ berechnet, und zwar zum einen eine Näherungslösung mithilfe der Multipolentwicklung, zum anderen zum Vergleich die direkte Lösung nach Gleichung (1). Es ergeben sich n_c^2 maximal zu erwartende Fehlerwerte der Approximation von $G(x_i, y_j)$ und $\frac{\partial G(x_i, y_j)}{\partial n_{y_j}}$. Deren Mittelwert lässt sich durch eine Erhöhung der Multipolordnung deutlich reduzieren (Abbildung 2).

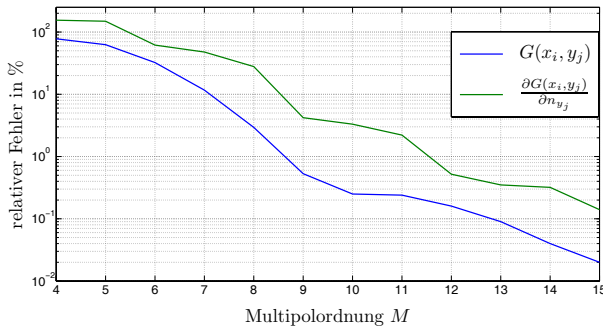


Abbildung 2: Variation des mittleren Fehlers zwischen konventioneller BEM und Multipolmethode für zwei benachbarte Cluster für diverse Multipolordnungen M .

Die Systemmatrix kann mit einer approximativen Inversen der Nahfeldmatrix A_{nah} vorkonditioniert werden; die Inverse wird aus einer unvollständigen LU-Zerlegung gewonnen. Durch die Vorkonditionierung ist ein Rückgang der benötigten Iterationen um maximal 25% zu erwarten.

Ergebnisse

Es zeigte sich, dass als Faustregel M etwa proportional zu \sqrt{k} (Wellenzahl) anwachsen sollte; eine Kontrolle mit dem Fehler der „Probecluster“ ist jedoch unabdingbar.

Verwendet wurde das 2D-Modell eines Autoinnenraums (Abbildung 3) mit $N = 240$ Elementen in $T = 16$ Clustern ($n_c = 15$) bei $f = 1000$ Hz. Auf der Kontaktfläche zum Motorraum ist die Normalschnelle vorgegeben. Die Scheiben sind schallhart, der Rest absorbierend. Der resultierende Schalldruck wurde mit der direkten Lösung des Systems (in Matlab: Befehl $A \setminus b$) auf einer horizontalen Feldpunktlinie etwa in Ohrenhöhe der Passagiere verglichen (Abbildungen 3 und 4).

Erwartungsgemäß ist die Multipolordnung M entscheidend für die Güte der Lösung. Für $M > 6$ liefert die Methode überall kleinere Fehler als 1 dB (Abbildung 4).

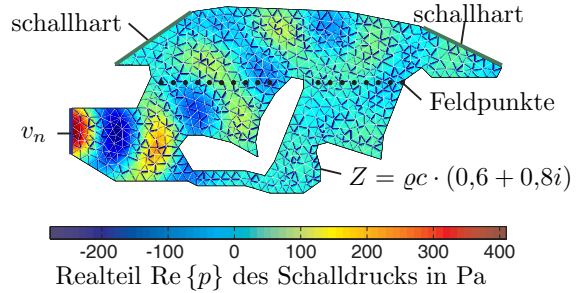


Abbildung 3: Automodell mit Feldpunkten und berechneter Schalldruckverteilung für $f = 1000$ Hz.

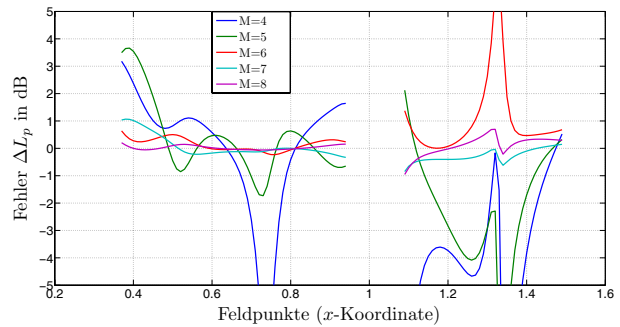


Abbildung 4: Fehler des Schalldruckpegels in den Feldpunkten zwischen konventioneller BEM und Multipolmethode für diverse Multipolordnungen M .

Für Elementanzahlen bis $N = 10.000$ erweist sich die Vorkonditionierung als effektiv, darüber ist der Aufwand für die Invertierung der Konditionsmatrix zu hoch (Abbildung 5 links).

Der Vorteil der Multipolmethode erweist sich erst für große Modelle. Es ist zu beachten, dass die implementierte Lösung nicht parallelisiert arbeitet, während Matlabs direkter Lösungsalgorithmus auf Ausnutzung aller CPU-Kerne hin optimiert wurde.

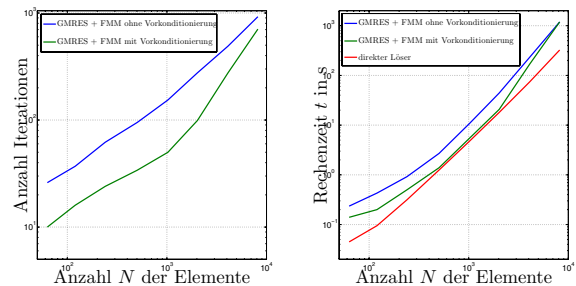


Abbildung 5: Anzahl der Iterationen und Rechenzeit für das Automodell mit 240 Boundary-Elementen bei $f = 1000$ Hz.

Literatur

- [1] Abramowitz, M. und Stegun, I.: *Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications New York, 1970.
- [2] Amini, S. und Profit, A.T.J., Analysis of a diagonal form of the fast multipole algorithm for scattering theory. *Bit Numerical Mathematics*, 39(4):585–602, 1999.