

Beschreibung und Diskussion von Unsicherheiten in der Modellbildung am Beispiel von scheinbar sehr einfachen Strukturen

P. Langer¹, S. Marburg²

¹ Universität der Bundeswehr München, 85577 Neubiberg, Deutschland, Email: Patrick.Langer@unibw.de

² Universität der Bundeswehr München, 85577 Neubiberg, Deutschland

Einleitung

Die Modellbildung und Simulation in der Entwicklungsphase von Bauteilen werden für den Ingenieur zunehmend wichtiger. In der Simulation numerischer Modelle ist die Finite-Element-Methode (FEM) ein Lösungsverfahren zur Berechnung des mechanischen Verhaltens von beliebig geformten Körpern. In dieser Arbeit werden Eigenfrequenzen von Balkenstrukturen aus numerischen und analytischen Modellen mit dem Experiment unter Berücksichtigung von Unsicherheiten verglichen, vgl.[2]–[4]. Material- und Geometrieunsicherheiten, Unsicherheiten durch Modellannahmen, Elementansatz und Fehler durch die Diskretisierung der Struktur werden mitbetrachtet. Der Pre- und Postprozessor von Abaqus/CAE V6.10 wurde für diese Studie verwendet.

Modellbeschreibung

In diesem Abschnitt werden die numerischen (FE), analytischen und experimentellen Modelle beschrieben.

FE-Modell

Die Untersuchung stellt höchste Güte und Genauigkeit an die Modellbildung. Die genutzten Elemente haben eine quadratische Ansatzfunktion, da lineare Elemente die Tendenz zu einer nicht korrekten Erhöhung der Struktursteifigkeit im Hinblick auf die Realität besitzen. Tabelle 1 zeigt die Elementtypen der Abaqus-Standard-Bibliothek. Abbildung 1 zeigt ein vernetztes Balkenmodell mit re-

Tabelle 1: Elementbeschreibung der Abaqus-Standard-Elemente[1]

Name	Knoten	Ansatz
C3D20	20	quadratisch
C3D20R	20	quadratisch
C3D20H	20	quadratisch
C3D10	10	quadratisch
C3D10M	10	quadratisch
C3D10I	10	quadratisch
C3D10H	10	quadratisch

gulärem Netz, ohne verzerrte Elemente und mit frei-freier Randbedingung.

Analytisches Modell

Das analytische Modell ist durch zwei bekannte Balkentheorien gegeben. Die Balkentheorie nach Euler-Bernoulli und nach Timoshenko. Diese Balkentheorien basieren

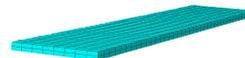


Abbildung 1: Vernetztes Balkenmodell mit regulärem Netz; Randbedingung frei-frei

auf Annahmen, wodurch die formulierten Differenzialgleichungen analytisch lösbar sind. Die Euler-Bernoulli-Theorie setzt einen schubfreien Querschnitt voraus und berücksichtigt keine Rotationsträgheit. Timoshenko erkannte das und beschreibt in seiner Formulierung einen linearen Verlauf der Schubspannung über den Querschnitt, was nur bedingt die Realität abbildet.

Physisches Modell und Experiment

Den Messaufbau zur experimentellen Modalanalyse aus der Ansicht des Laser-Doppler-Vibrometers, womit die Schwingformen der Balkenstrukturen gemessen werden, zeigt Abbildung 2: Mikrophon (1), Lautsprecher (2), Balkenstruktur (3), elastische Aufhängung (4) und reflexionsarmer Raum (5).

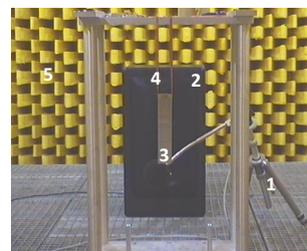


Abbildung 2: Messaufbau zur experimentellen Modalanalyse der Balkenstrukturen

Ergebnisse

Die Material- und Werkstoffparameter der Balkenstrukturen für Stahl (C45) und Aluminium (ENAW) mit deren Abweichungen ε zeigt Tabelle 2.

Grad der Diskretisierung

Um die bestmögliche Diskretisierung der numerischen Modelle für den Vergleich zur experimentellen Lösung zu finden, wurden die ersten drei Eigenfrequenzen der Biegemoden eines numerischen Modelles mit der analytischen Lösung verglichen. Elementkantenlänge, Schichtanzahl in der Höhe h des Balkens und der Elementtyp nach Tabelle 1 wurden variiert. Die geringste Abweichung für die Hexaederelemente ergab sich mit 1 mm Elementkantenlänge, 2 Schichten und dem Elementtyp C3D20

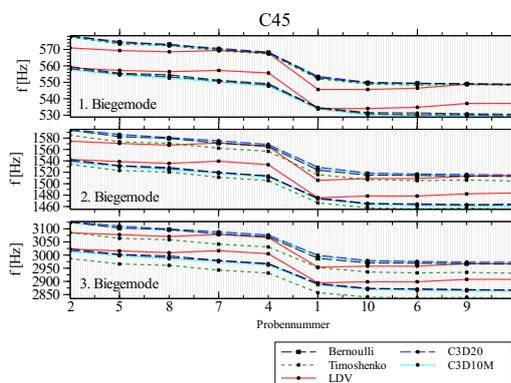
Tabelle 2: Nennwerte der Geometrie- und Werkstoffdaten der Balkenstrukturen; relative Abweichung ε

	C45	ENAW	ε
l [mm]	200	200	± 0.01 %
b [mm]	40	40	± 0.05 %
h [mm]	4	4	± 0.5 %
ρ [kgm]	7817	2663	± 0.1 %
ν [-]	0.3	0.34	$\pm 3.3/2.3$ %
E [GPa]	211	72	± 2.3 %
Probenzahl	10	10	

(N_H). Für die Tetraederelemente war die Abweichung mit dem Netz von 1 mm Elementkantenlänge, 3 Schichten über der Höhe h und dem Elementtyp C3D10M am geringsten (N_T). Mit diesen Netzkonfigurationen wurden nun die 20 Balkenproben gerechnet.

Modellunsicherheiten

Jedes Modell beinhaltet Unsicherheiten in Material und Geometrie. Das FE-Modell enthält zusätzlich Diskretisierungsfehler. Das analytische Modell besitzt Vereinfachungen physikalischer Zusammenhänge. Die Unsicherheit im Experiment hängt von der Messgenauigkeit der Instrumente, dem Messaufbau (Abbildung der frei-freien Randbedingung) und dem Eigenspannungsanteil der Proben ab. Abbildung 3 zeigt die ersten drei Eigenfrequenzen

**Abbildung 3:** Ersten drei Eigenfrequenzen der Biegemoden mit Betrachtung der Unsicherheiten

zen der Biegemoden mit Betrachtung der Unsicherheiten. Die Ober- und Untergrenzen identifizieren für jedes Modell die Gesamtabweichung. Bei den Eigenfrequenzen der 1. Biegemode weisen alle Modelle eine hohe Übereinstimmung auf. Bei der zweiten und dritten Eigenfrequenz weicht der Mittelwert des Timoshenko-Modelles im Vergleich zu den anderen Modellen stark ab. Das gleiche Verhalten zeigte sich bei den Aluminiumproben.

Vergleich zum Experiment

Die relative Abweichung ε_P der Modelle zum Experiment wird durch Gleichung 1 beschrieben.

$$\varepsilon_P = \left(\frac{f_{n/a}}{f_e} - 1 \right) \cdot 100 \quad (1)$$

$f_{n/a}$ sind die Eigenfrequenzen der numerischen und analytischen Modelle und f_e die Ergebnisse aus der experimentellen Modalanalyse. Die größte relative Abweichung zum Experiment haben die Ergebnisse mit der Theorie nach Timoshenko, gefolgt von der Bernoulli-Theorie. Die Lösungen mit der geringsten Abweichung zum Experiment haben die numerischen Modelle. Für die Stahlproben waren die Modelle mit der Diskretisierung nach N_H und für Aluminiumproben die Diskretisierung nach N_T am exaktesten. Das arithmetische Mittel der relativen Abweichung zum Experiment ε_P über 10 Proben zeigt Tabelle 3.

Tabelle 3: Arithmetisches Mittel der relativen Abweichung ε_P von Numerik zum Experiment über 10 Proben; Stahlproben mit N_H ; Aluminiumproben mit N_T ; f_1 - f_3 : Eigenfrequenzen der Biegemoden

	ε_P bei f_1	ε_P bei f_2	ε_P bei f_3
Stahl	-0.06 %	-0.07 %	-0.05 %
Aluminium	0.25 %	0.14 %	0.13 %

Zusammenfassung

Diese Arbeit gibt eine Empfehlung über den Grad der Diskretisierung in FE-Modellen von einfachen Strukturen, bei denen die Ergebnisse konvergieren. Es zeigt dem Ingenieur, welche Anzahl an Freiheitsgraden bei einfachen Balkenstrukturen ausreichend ist. Numerische, physische und analytische Modelle haben eine hohe Übereinstimmung bis zur dritten Eigenfrequenz der Biegeschwingungen. Es wird an analytischen Modellen gezeigt, dass trotz Verwendung einer Balkentheorie höherer Ordnung, die Ergebnisse dadurch nicht zu einem besseren Resultat führen müssen. Der Vergleich mit der experimentellen Modalanalyse zeigt, dass die FE-Modelle die niedrigste Abweichung zum Experiment besitzen. Für Stahlproben mit dem Elementansatz C3D20, für Aluminiumproben mit den Elementen C3D10M.

Literatur

- [1] Abaqus User and Theory Manual 6.10-3.
- [2] Marburg, S., Beer, H.-J., Gier, J. und Hardtke, H.-J.: Experimental verification of structural-acoustic modelling and design optimization. Journal of Sound and Vibration (2002), 167-179
- [3] Sefhavand, K. und Marburg, S.: On construction of uncertain material parameter using generalized polynomial chaos expansion from experimental data. In ITUAM Symposium on Multiscale Problems in Stochastic Mechanics (2002), 4-17
- [4] Han, S. M., Benaroya, H. und Wei, T.: Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. Journal of Sound and Vibration (1999), 935-988