

# Die Energie-Finite-Elemente-Methode zur Anwendung im Schiffbau

Bernd Stritzelberger, Otto von Estorff

Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung

21073 Hamburg, Deutschland, E-Mail: mub@tuhh.de

## Einleitung

Numerische Simulationen zur Untersuchung dynamischer Eigenschaften von Systemen sind ein wichtiger Bestandteil im modernen Entwicklungsprozess unterschiedlichster ingenieurtechnischer Bereiche. Weitverbreitet findet hierzu häufig die klassische Finite-Elemente-Methode (FEM) Anwendung. Im operativen Schiffbau ist der Einsatz dieser Methode bei der Betrachtung ganzheitlicher Strukturen jedoch auf den unteren Frequenzbereich beschränkt. Eine mit der Frequenz steigende Zahl der Freiheitsgrade und damit verbunden eine stark steigende Rechenzeit stehen im Widerspruch zu den Anforderungen im Entwurfsprozess.

Für die effektive numerische Berechnung großer Strukturen im höheren Frequenzbereich wird die Energie-Finite-Elemente-Methode (EFEM) vorgeschlagen. Dieses gitterbasierte Verfahren approximiert wellenbasierte Energieflussgleichungen zur Lösung vibro-akustischer Fragestellungen. Die Möglichkeit frequenzunabhängige Rechengitter zu verwenden erlaubt den Einsatz dieser Methode über einen breiten Frequenzbereich bei gleichbleibendem Berechnungsaufwand und unveränderter Detailgüte. Ergebnisse der Analyse einer schiffbau-typischen Teilstruktur werden vorgestellt. Der Vergleich zu klassischen FEM-Berechnungen diskutiert die methodischen Eigenheiten der EFEM und ihre Anwendbarkeit im Schiffbau.

## Grundlagen der EFEM

Die Energie-Finite-Elemente-Methode basiert auf der Energieerhaltung. Im stationären Zustand folgt für ein differentielles Gebiet

$$\pi_{in} = \nabla \cdot \mathbf{q} + \pi_{diss} \quad (1)$$

mit der von außen eingebrachten Leistungsdichte  $\pi_{in}$  und der dissipierten Leistungsdichte  $\pi_{diss}$ . Die Dimensionen des austretenden Energieflusses  $\mathbf{q}$ , sowie des Nabla-Operators  $\nabla$  sind von der Dimension des untersuchten Gebietes abhängig. Bei einer zeitgemittelten Betrachtung im hohen Frequenzbereich sind kinetische und potentielle Energiedichte näherungsweise gleich. Wird weiter eine Analogie zur Wärmeleitung herangezogen, bei der Energieflüsse von hohen zu niedrigen Energieniveaus resultieren, lässt sich für geringe Dämpfungen im Medium aus Gleichung (1) die EFEM-Grundgleichung

$$\langle \pi_{in} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \omega\eta \langle e \rangle \quad (2)$$

herleiten [1]. Mit  $\eta$  ist der Dämpfungs-Verlustfaktor und mit  $\omega$  die Kreisfrequenz eingeführt,  $\langle \rangle$  kennzeichnet zeitgemittelte Größen. Bei der EFEM handelt es sich um

einen wellenbasierten Ansatz im Frequenzbereich. Dabei werden ausschließlich ebene Wellen berücksichtigt. Zustandsgröße ist die zeitlich gemittelte Energiedichte  $\langle e \rangle$  einzelner Wellentypen, die durch ihre entsprechende Gruppengeschwindigkeit  $c_g$  unterschieden werden. Für Platten und Kavitäten im Allgemeinen, sowie Biegewellen in Balken wird zusätzlich eine räumliche Mittelung  $\langle \cdot \rangle$  über eine Wellenlänge eingeführt. Es resultiert eine glatte Lösung ohne oszillierende Terme.

Im Gebiet  $\Omega$  mit dem Rand  $\Gamma$  lässt sich Gleichung (2) unter Anwendung der Methode der finiten Elemente als Matrixgleichung der Form

$$\underbrace{\int_{\Omega} \left( \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N} + \eta\omega \mathbf{N}^T \mathbf{N} \right) d\Omega}_{\mathbf{K}} \mathbf{e} = \underbrace{- \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T q_n d\Gamma}_{\mathbf{Q}} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \pi_{in} d\Omega}_{\mathbf{F}} \quad (3)$$

mit den Formfunktionen  $N$  approximieren. Die zeit- und gegebenenfalls raumgemittelte Gesamt-Energiedichte jedes auftretenden Wellentyps repräsentiert darin einen Freiheitsgrad (FHG) pro Knoten des diskretisierten Systems in Vektor  $\mathbf{e}$ .

Die Interaktion von Wellen wird mittels Transmissionskoeffizienten

$$\tau_{im,jn} = \frac{\Pi_{jn}}{\Pi_{im}} \quad (4)$$

beschrieben. Sie definieren, wieviel Leistung  $\Pi$  einer einfallenden Welle vom Typ  $m$  aus Komponente  $i$  als Welle vom Typ  $n$  in Komponente  $j$  transmittiert wird. Eine analytische Methode zur Bestimmung der Koeffizienten bei einer Linienkopplung von Platten ist in [2] gegeben. Durch den Energieaustausch folgt eine unstetige Verteilung der Energiedichte an den Kopplungsstellen. Spezielle Kopplungselemente mit dublizierten Knoten werden eingeführt, um diese Lösung abbilden zu können. Mithilfe der Transmissionskoeffizienten können Kopplungsmatrizen  $\mathbf{K}_c$  definiert werden, die zu einem voll-gekoppelten EFEM-System

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c) \mathbf{e} = \mathbf{Q} + \mathbf{F} \quad (5)$$

führen [1][3]. Die spezifische Form der Lösung ohne oszillierende Terme erlaubt eine grobe Vernetzung unabhängig von der Frequenz. Im Vergleich zur klassischen FEM sind die Ergebnisse als räumliche Mittelwerte zu interpretieren.

## Numerisches Beispiel

Für einen Vergleich der EFEM mit der klassischen FEM wird die in Abbildung 1 dargestellte Schiffbaustruktur aus Stahl herangezogen. Die rechteckige Grundplatte bemisst 1,6 m x 1,85 m x 4,5 mm. Das gezeigte EFEM-Modell ist mit 826 Plattenelementen und 3.879 FHG verhältnismäßig grob vernetzt. Dem gegenüber steht das Modell für die klassische FEM-Rechnung mit 13.146 Elementen und 80.040 FHG. Die punktförmige Anregung erfolgt für alle Frequenzen mit einer Kraft von 1,41 N. Die Eingangsleistung  $\Pi_{in}$  für die EFEM-Berechnung ist aus den Ergebnissen der klassischen FEM im Anregungspunkt ermittelt. Abbildung 2 zeigt eine hohe Frequenzabhängigkeit von  $\Pi_{in}$  im Terzband um 2000 Hz.

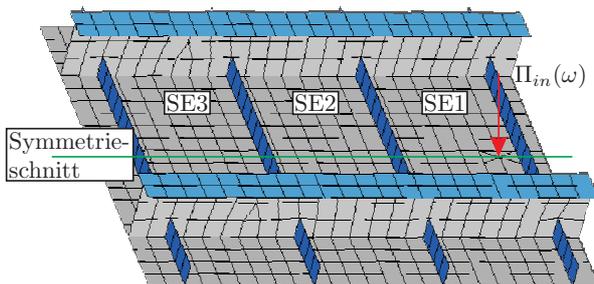


Abbildung 1: EFEM-Modell einer Schiffbaustruktur

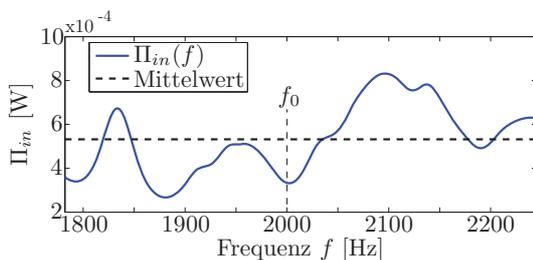


Abbildung 2: Eingangsleistung im Terzband (2000 Hz)

Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse für die Energiedichte der Biegewellen aus klassischer FEM und EFEM erfolgt in Abbildung 3 entlang des Symmetrieschnittes auf der Grundplatte. Der Anregungspunkt befindet sich bei  $z=1,67$  m. Neben einer tonalen Rechnung bei der Mittenfrequenz  $f_0$  ist zudem eine im Terzband frequenzgemittelte FEM-Lösung mit 927 Einzelrechnungen gezeigt. Die entsprechende EFEM-Rechnung ist bei  $f_0$  und dem Mittelwert von  $\Pi_{in}$  durchgeführt.

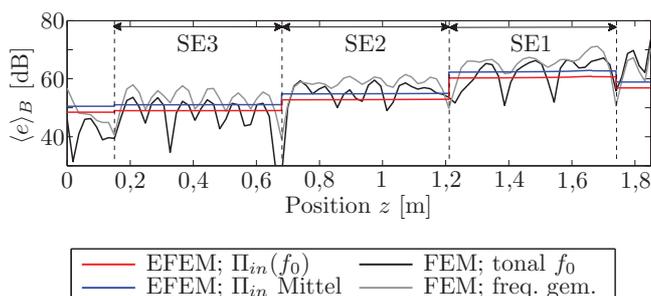


Abbildung 3: FEM und EFEM im Symmetrieschnitt

Für den tonalen, wie auch gemittelten Vergleich zeigen die beiden Methoden eine gute Übereinstimmung. Wie erwartet repräsentiert die EFEM-Lösung eine Art Mittelwert der oszillierenden verschiebungsbasierten FEM-Lösung. Zwischen den versteifenden Rippen sind drei Plattensegmente als Strukturelemente (SE1 bis SE3) definiert, in denen sich die Wellen ungehindert ausbreiten können. Durch die Kopplung erfolgt an den Rändern der Strukturelemente ein Energieaustausch der einzelnen Wellen. Die Diskontinuitäten in der EFEM-Lösung weisen auf die Kopplungsstellen hin.

Abbildung 4 verdeutlicht die Abweichung zwischen FEM- und EFEM-Lösung, räumlich gemittelt über jeweils die Fläche eines Strukturelements und abhängig von der Abtastrate zur Frequenzmittelung. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die starken frequenzabhängigen Effekte in der FEM werden durch die Mittelung abgeschwächt.

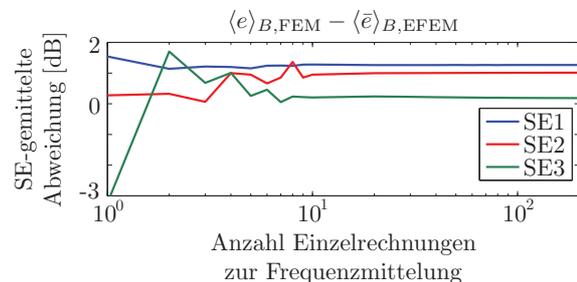


Abbildung 4: Abweichung zwischen FEM- und EFEM-Ergebnissen im Terzband (2000 Hz)

## Zusammenfassung

Der wellenbasierte Energieansatz der EFEM erlaubt eine grobe Diskretisierung unabhängig von der Frequenz. Damit bietet diese Methode das Potenzial, die Verfügbarkeit numerischer Simulationen im Schiffbau bei akzeptablem Rechenaufwand auch in den hohen Frequenzbereich zu erweitern. Als Lösung resultiert eine zeit- und räumlich gemittelte Verteilung der Energiedichte, die insbesondere durch die Beschreibung der Kopplung einzelner Komponenten bestimmt wird.

Die Autoren danken für die Förderung des Verbundprojektes EPES durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages.

## Literatur

- [1] Moens, I.: On the use and the validity of the energy finite element method for high frequency vibrations. Dissertation, K.U. Leuven, Belgien, 2001
- [2] Langley, R. S. und Heron, K. H.: Elastic wave transmission through plate/beam junctions. Journal of Sound and Vibration (1990), Vol. 143, Nr. 2, 241-253
- [3] Stritzelberger B. et al.: On the energy finite element method for the acoustic design of ships. ASA Proceedings of Meetings on Acoustics (2013), Vol. 19, 065077