Iterative Kopplung von BEM und FEM zur Vorhersage von schiffsinduziertem Lärm in Ufernähe

Sören Keuchel und Otto von Estorff
Technische Universität Hamburg-Harburg, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de

Einleitung

Eine sinnvolle Möglichkeit zur Vorhersage von schiffsinduziertem Lärm ist die numerische Simulation, wobei unterschiedliche Übertragungswege zu berücksichtigen sind. Zum einen gibt es den direkten Weg Schiff-Luft-Empfänger und zum anderen den Weg Schiff-Wasser-Boden-Empfänger. Durch die unterschiedlichen Medien und Übergänge entstehen unterschiedliche Anforderungen an die numerischen Methoden. Der direkte Weg kann mit Hilfe der Boundary-Elemente-Methode (BEM) simuliert werden, wobei nur eine Diskretisierung der Oberfläche notwendig ist und die halbunendliche Abstrahlung automatisch durch die verwendete Formulierung erfüllt wird. Der indirekte Weg über den Boden erfordert eine komplexere Vorgehensweise, da aufgrund der geringen Dichte- und Schallgeschwindigkeitsunterschiede zwischen Wasser und Boden eine bidirektionale Kopplung erforderlich ist. Für eine optimale Berechnung bei unterschiedlichen Materialeigenschaften ist eine auf das jeweilige Gebiet angepasste Methode, wie z.B. BEM oder FEM, sinnvoll. Die verschiedenen Methoden sind jedoch häufig in unterschiedlicher Software umgesetzt oder erfordern spezielle Lösungsalgorithmen, weswegen eine direkte Kopplung nicht immer möglich ist. Eine einfache Möglichkeit ist die iterative Kopplung zwischen zwei Methoden, wobei die Systeme getrennt voneinander gelöst und die Randbedingungen an der Schnittstelle übertragen werden. Eine Konvergenz ist hier jedoch nicht garantiert und insbesondere im Frequenzbereich neigen die gekoppelten Systeme zu einer starken Instabilität. Im Folgenden wird eine Möglichkeit vorgestellt, welche eine bewiesene Konvergenz bietet und trotzdem die Möglichkeit einer getrennten und damit optimalen Lösung der Teilsysteme erlaubt.

Iterative Kopplung

Die bidirektionale Kopplung beruht auf der Nutzung der Kompatibilitätsbedingungen für den Druck p und die Verschiebung u an der Schnittstelle zwischen den Teilgebieten, wobei im Frequenzbereich aufgrund der zeitharmonischen Betrachtung die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Verschiebung als $v = i\omega u$ dargestellt werden kann. Mit Hilfe dieser Beziehung können die Übergangsbedingungen zwischen der BEM (Index B) und der FEM (Index F) wie folgt dargestellt werden:

$$u_B = u_F \quad \text{und} \quad p_B = p_F \; . \tag{1}$$

Mit den entsprechenden Transformationsmatrizen wird diese direkte Kopplung in Matrix-Form vereinfacht als

$$\begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

beschrieben. Im FEM-System wird der Druck als Anregung verwendet und die Variablen werden zwischen internen FEM- und Interface-Freiheitsgraden (Index I) unterteilt. Somit folgt

$$Ku + Fp = 0 \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} K_F & F_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_F \\ u_{FI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_F & F_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_{FI} \end{bmatrix} = 0 \; . \tag{4}$$

Dieses System kann dann über die Inverse der Systemmatrix gelöst werden. Aus der Multiplikation mit der Transformationsmatrix T_I entstehen die Verschiebungen u_{FI} an der Schnittstelle:

$$u = -K^{-1}Fp \tag{5}$$

$$u_{FI} = -T_I K^{-1} F p_{FI} \; . \tag{6}$$

Das Gleichungssystem der BEM kann ebenso umgeformt werden, wobei eine Umsortierung Variablen nach Unbekannten x_B und Randbedingungen y_B mit den entsprechend umsortierten Matrizen M_B und N_B notwendig ist. Die Umformungen lauten in Matrix-Form

$$Gu + Hp = 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} G_B & G_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_{BI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_B & H_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_B \\ p_{BI} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$= 0 \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} M_B & G_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ u_{BI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_{BI} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} N_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_B \\ 0 \end{bmatrix} \; . \tag{11}$$

Mit Hilfe der Verschiebung des FEM-Systems aus Gleichung (6) wird die Lösung für das direkt gekoppelte Gesamtsystem durch Verwendung des Schurkomplements nach [1] als

$$\begin{bmatrix} M_B & -G_I T_I K^{-1} F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ p_{BI} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & H_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p_{BI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_B & (H_I - G_I T_I K^{-1} F) \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} x_B \\ p_{BI} \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{N_B y_B}_{b} \tag{14}$$

dargestellt. Die Lösung dieses Systems ist nur noch von den BEM-Variablen und den unbekannten Drücken p_{BI} im Kopplungsbereich abhängig. Das entstandene Gleichungssystem kann mit unterschiedlichen Algorithmen gelöst werden und besitzt eine ähnliche Kondition wie das reine BEM-System. Ein Problem ist jedoch die explizite Abhängigkeit von den FEM-Matrizen. Die Matrizen K und F stehen bei Verwendung unterschiedlicher Software nicht notwendigerweise zur Verfügung. Für die iterative Kopplung unterschiedlicher numerischer Methoden ist es somit notwendig die explizite Abhängigkeit von einzelnen Matrizen aufzulösen. Eine Möglichkeit zur Lösung des Systems $Sx = b$ ist die Verwendung eines iterativen Gleichungslösers, wie z.B. GMRES. Dieser ist nur noch eine Funktion der Matrix-Vektor-Multiplikation GMRES $= \mathrm{f}(Sx)$ und benötigt nicht die explizite Matrix S. Die Matrix-Vektor-Multiplikation lässt sich damit neu definieren zu

$$Sx \overset{!}{=} M_B x_B + H_I p_{BI} - G_I \underbrace{T_I K^{-1} F p_{BI}}_{u_{FI}} \; . \tag{15}$$

Innerhalb dieser neuen Multiplikation kann jetzt der Term u_{FI} in Abhängigkeit der Eingangsgröße p_{BI} bestimmt werden. Es wird hierzu ein FEM-System gelöst, wobei nur die Eingangsdaten bekannt sein müssen. Die resultierenden Ausgangsgrößen werden nach dem inneren FEM-Lösungsprozess mit der Matrix G_I multipliziert. Das Gesamtsystem wird somit durch einen äußeren GMRES gelöst, welcher innerhalb jeder Iteration eine FEM-Lösung mit dem dafür optimalen Algorithmus bestimmt. Zudem bietet der GMRES eine garantierte Konvergenz der Kopplung. Für das gekoppelte System wird nur einmal das BEM-System gelöst und abhängig von der Anzahl der benötigten Iterationen wird das FEM-System gelöst. Durch die neue Definition der Multiplikation (15) ist die Lösung des System nicht mehr abhängig von den expliziten FEM-Matrizen und trotzdem ermöglicht der GMRES eine garantierte Konvergenz.

Numerisches Beispiel

Die vorgestellte iterative Kopplungsmethode soll unter Verwendung einer kommerziell verfügbaren Software verifiziert werden. Das Modell besteht aus einer symmetrischen zweidimensionalen Fluss-Geometrie, wobei die beiden Teilgebiete Wasser und Boden miteinander gekoppelt sind. Die Anregung durch das Schiff erfolgt über Randbedingungen im Wassergebiet. Die FEM-Software Abaqus [2] verfügt über ein linear-elastisches Festkörper-Element, welches zur Modellierung des Bodens verwendet wird. Das Wasser wird aufgrund der homogenen Eigenschaften mit Hilfe der BEM modelliert und die iterative Kopplung erfolgt nach dem Schema des vorgestellten Algorithmus. Die FEM-Software wird hierbei innerhalb jeder Matrix-Vektor-Multiplikation über die Randbedingungen u_{FI} angesteuert und das resultierende Ergebnis p_{FI} wird innerhalb des GMRES verwendet.

Zu Vergleichszwecken wird die interne Kopplungsroutine von Abaqus verwendet, wobei das Wasser genauso wie der Boden mittels FEM modelliert wird. In Abbildung 1 ist der Verlauf des Betrags der Verschiebung in vertikaler Richtung an den Kopplungsknoten dargestellt, wobei die interne Abaqus-Kopplungsroutine mit dem Resultat des vorgestellten iterativen Kopplungsalgorithmus verglichen wird. In dem Diagramm ist die gute Übereinstimmung der beiden Varianten zu erkennen, daher ist die Methode zur Untersuchungen von gekoppelten System geeignet. Der iterative Kopplungsalgorithmus kann als Grundlage für Optimierungen verwendet werden, um spezielle Verfahren für die Berechnung von Teilgebieten, wie z.B. die Fast-Multipole-Methode in der BEM oder auch komplexe Stoffgesetze in der FEM, zu implementieren. Durch das vorgeschlagene Verfahren können diese Formulierungen in unterschiedlichen Software-Paketen zur Verfügung stehen und trotzdem ist eine Konvergenz der Kopplung durch den äußeren GMRES gegeben.

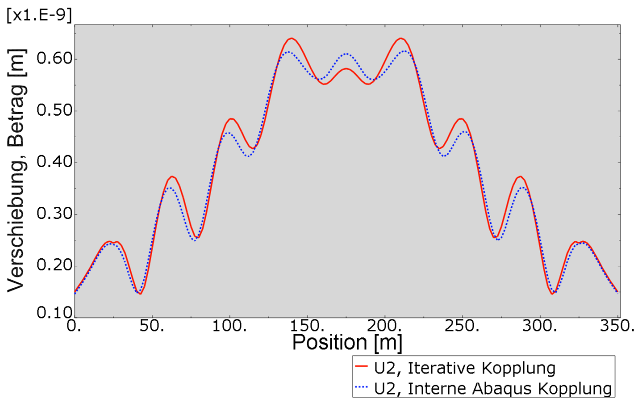

Abbildung 1: Betrag der Verschiebung an der Kopplungsschnittstelle bei unterschiedlichen Kopplungsverfahren

Zusammenfasssung

Das vorgestellte iterative Kopplungsverfahren ermöglicht die Vorhersage von schiffsinduziertem Lärm in Ufernähe, wobei die Kopplung zwischen den Teilgebieten Wasser und Boden bidirektional erfolgen muss. Die Methode wurde anhand einer kommerziellen Software mit integrierter Kopplungsroutine verifiziert. Das Verfahren kann damit für weitergehende Optimierungen hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz eingesetzt werden. Die getrennte Lösung von BEM und FEM erlaubt speziell auf die unterschiedlichen Systemmatrizen angepasste Lösungsalgorithmen und ermöglicht die Verwendung unterschiedlichster Software mit bestimmten Stoffmodellen.

Literatur

[1] Brunner, D., *Fast Boundary Element Methods for Large-Scale Simulations of the Vibro-Acoustic Behavior of Ship-Like Structures*, Universität Stuttgart, Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik, (2009).

[2] Abaqus, *Documentation, Version 6.12*, Dassault Systemes, (2012).