Einfluss und Diskussion von Unsicherheiten bei einfachen Strukturen in Simulation und Experiment

P. Langer[1], K. Sepahvand und S. Marburg

Universität der Bundeswehr München, 85577 Neubiberg, Deutschland, [1]Email: Patrick.Langer@unibw.de

Einleitung

Die Finite–Elemente–Methode (FEM) wird in verschiedenen Industriebereichen, beispielsweise im Automobilsektor, im Flugzeugbau und im Schiffsbau genutzt. Eine Studie zur Beschreibung von Abweichungen zwischen modellbasierter Simulation und physikalischer Realität beschreibt Ghanem in [1] als Quantifizierung von Unsicherheiten (UQ). Generelle Empfehlungen bezüglich Modellunsicherheiten gibt Sargent in [2], welche essentiell für die Modellbildung und den Entwicklungsprozess sind. Die Anwendung von Methoden zur Berücksichtigung von Unsicherheiten in verschiedensten praktischen technischen Problemen werden bereits in einigen Arbeiten beschrieben, siehe [3, 4]. Die Motivation dieser Arbeit ist es, die Abbildungsgenauigkeit von dreidimensionalen FE–Modellen, unter der Berücksichtigung von Modell- und Parameterunsicherheiten, der zugrunde liegenden Strukturen zu verbessern. Solche systembezogenen Parameter sind Geometrie, Werkstoff, Randbedingungen und Diskretisierungsgrad. Im Fokus stehen einfache Strukturen, um numerische Lösungen mit den Ergebnissen der experimentellen Modalanalyse (EMA) zu vergleichen. Letztgenanntes wird als physisches Modell bezeichnet. Die FE–Modelle werden zunächst mit einem effizienten regulären Netz diskretisiert und mit den physischen Modellen verglichen. Werden die Strukturen komplexer, sind verzerrte Elemente nicht vermeidbar, deshalb wird deren Einfluss näher betrachtet. Die Untersuchungen zeigen auf, wie detailliert ein numerisches Modell aufgebaut werden muss, um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen.

Modellbeschreibung

Im Folgenden werden die untersuchten Strukturen und die verwendeten Modelltypen beschrieben.

Prüfkörper

Abbildung 1 zeigt die untersuchten Proben mit deren Abmaße. Bei der einfachen Balkenstruktur liegt ein reines Balkenproblem vor, da eine Dimension der Struktur sehr viel größer ist als die anderen Beiden. Die Nennmaße des Balkens betragen $0.2\,\mathrm{m} \times 0.04\,\mathrm{m} \times 0.004\,\mathrm{m}(L \times B \times H)$. Betrachtet werden 10 Aluminiumproben (ENAW2014) und die gleiche Anzahl an Stahlproben (C45). Die Dimensionen des Balkenteiles der Balken mit Endmasse sind die gleichen wie die der einfachen Balkenstruktur. Die Endmasse hat die Nennmaße $100mm \times 40mm \times 100mm$ ($L_\mathrm{E} \times B_\mathrm{E} \times H_\mathrm{E}$). Es werden 6 Aluminiumproben (ENAW2014) und 6 Stahlproben (C45) untersucht.
Beide Strukturen wurden mit gleichen Fertigungstoleranzen gefertigt.

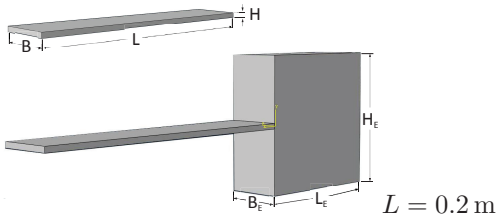

Abbildung 1: Einfache Balkenstruktur mit den Nennmaßen $L = 0.2\,\mathrm{m}$, $B = 0.04\,\mathrm{m}$ und $H = 0.004\,\mathrm{m}$; Einfache Balkenstruktur mit Endmasse und den Nennmaßen $L_\mathrm{E} = 0.1\,\mathrm{m}$, $B_\mathrm{E} = 0.04\,\mathrm{m}$ und $H_\mathrm{E} = 0.1\,\mathrm{m}$

Tabelle 1: Elementbeschreibung der verwendeten Elementtypen aus der ABAQUS–Standard–Bibliothek[5]

Name	Knoten	Ansatz
C3D20	20	quadratisch
C3D10M	10	quadratisch
C3D8	8	linear

FE–Modell

Die FE–Modelle zum Vergleich mit experimentellen Ergebnissen wurden ausschließlich mit regulären Netzen und dreidimensionalen quadratischen Elementen diskretisiert. Als Randbedingung wurde eine ideal frei–freie Lagerung gewählt. Tabelle 1 zeigt die verwendeten Elementtypen der ABAQUS–Standard–Bibliothek.

Experiment/Physisches Modell

Die Genauigkeit der Ergebnisse des physischen Modells ist von der Präzision des eingesetzten Messequipments und dem Messaufbau abhängig. Die Methode der Anregung und der Messung der Strukturantwort, sowie die Lagerung der Struktur muss daher sorgfältig gewählt werden. Die experimentelle Modalanalyse wurde je nach Zielsetzung der Untersuchungen mit verschiedenen Messaufbauten durchgeführt, wobei das Messverfahren für die Balken mit Endmasse (1) in Abbildung 2 dargestellt ist. Eine ideal frei-freie Randbedingung wie in den FE–Modellen wurde für jeden Messaufbau durch eine elastische Aufhängung idealisiert (2).
Das kontaktfreie Messverfahren ist durch eine berührungslose Anregung des Prüfkörpers und einem kontaktlosen Erfassen der Strukturantwort gekennzeichnet. Für diese Arbeit wurden die einfachen Balkenstrukturen mittels Lautsprecher angeregt, der eingeleitete Schalldruck erfasst und die Schwingungsant-

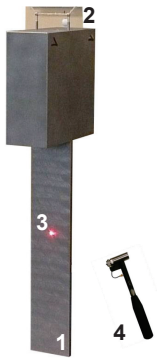

Abbildung 2: Eines von mehreren angewendeten Messverfahren zur experimentellen Modalanalyse

wort der Struktur über ein Laser–Doppler–Vibrometer gemessen. Diese Methode ist limitiert in ihrer Anregungsenergie und nur für kleine Prüfkörper geeignet. Die Balken mit Endmasse (1) wurden deshalb über einen Impuls mittels Modalhammer (4) angeregt. Die Messung der Schwingungsantwort wurde wiederum durch Abtasten der Struktur mittels Laser (3) erfasst. Die Eigenfrequenzen und die dazugehörigen Biegemoden wurden numerisch mit ME'scope berechnet.

Quantifizierung der Unsicherheiten

Bei der Identifikation und Quantifizierung von Unsicherheiten muss zwischen Modell - und Parameterunsicherheiten unterschieden werden. Zum Letzteren gehören Unsicherheiten in Werkstoff und Geometrie. Modellunsicherheiten beinhalten Annahmen in der Formulierung des mathematischen Modells, Randbedingungen und im FE–Modell die Diskretisierung der Struktur. Im Experiment sind Messfehler und Unsicherheiten durch den Messaufbau aufzuführen.

Paramterunsicherheiten

Geometrieparameter mit behafteter Unsicherheit sind die Abmaße des Balkens (L, B, H) und die der Endmasse (L_E, B_E, H_E). Die relative Abweichung zum Mittelwert beträgt für die Länge L $\pm 0.01\%$, für die Breite B $\pm 0.05\%$ und für die Höhe H $\pm 0.5\%$. Für die Dimensionen der Endmasse gilt für die Länge L_E eine relative Abweichung von $\pm 0.02\%$, für die Breite B_E von $\pm 0.05\%$ und für die Höhe H_E von $\pm 0.02\%$. Die Werkstoffparameter behaftet mit Unsicherheiten sind der Elastizitätsmodul E, die Querkontraktionszahl ν und die Dichte ϱ. Die zugehörigen Abweichungen zu den Mittelwerten für Aluminium (ENAW2014) sind $\pm 2.8\%$, $\pm 2.4\%$ und $\pm 0.03\%$ und für Stahl (C45) $\pm 2.8\%$, $\pm 4.0\%$ und $\pm 0.03\%$.

Unsicherheiten in der Modellbildung

Im FE–Modell wird die Struktur mit Finite–Elementen diskretisiert. Der Elementtyp, deren Anzahl und die Qualität des Netzes haben Einfluss auf die Genauigkeit der numerischen Lösung. Um eine effiziente Vernetzung für die verwendeten Modelle zu ermitteln, wurde ein FE–Modell der einfachen Balkenstruktur mit regulären Netzen diskretisiert, der Elementtyp und die Elementanzahl variiert. Die Lösungen wurden mit der analytischen Lösung der Balkentheorie nach Bernoulli verglichen. Für diese Studie wurden ausschließlich quadratische Hexaeder- und Tetraederelemente verwendet. Die geringste Abweichung ergaben sich mit C3D20 Elementen, mit einer Schicht über der Balkenhöhe H und einer Elementkantenlänge von 0.001 m. Für das Tetraedernetz wurde der Elementtyp C3D10M mit zwei Schichten über der Höhe des Balkens und ebenso einer Elementkantenklänge von 0.001 m ermittelt. Untersuchungen mit den einfachen Balkenstrukturen haben gezeigt, dass der relative numerische Fehler bis 3000 Hz für die ersten drei Biegemoden durch diese Diskretisierung $< 0.25\%$ beträgt. Der Elastizitätsmodul E ist der einflussreichste Parameter auf die Eigenfrequenzen der Biegemoden der Balkenstruktur. Im Vergleich dazu ist der Einfluss der ermittelten Netze mit regulären Elementformen und einer ausreichenden Anzahl an Freiheitsgraden vernachlässigbar. Da für komplexere Strukturen verzerrte Elemente nicht ausgeschlossen werden können, wird im nächsten Abschnitt deren Einfluss betrachtet.

Verzerrte Elemente

ABAQUS/CAE verwendet für die Verifizierung der Modellnetze verschiedenste Kriterien, um verzerrte Elemente zu ermitteln und setzt je nach Grad der Verzerrung eine Warn - oder Fehlermeldung für dieses Element fest. Für diese Arbeit wurde das Winkelkriterium und der geometrische Abweichungsfaktor verwendet, um die Elemente gezielt zu verzerren und eine Warnmeldung zu erzwingen. Bei einer Fehlermeldung ist das Model für den Pre–Processor nicht mehr lösbar.
Das Winkelkriterium überprüft den Winkel von zwei Elementkanten, die in einem Knoten zusammenlaufen. Ist dieser größer als 10 Grad, besitzt die Elementlösung eine ausreichende Genauigkeit. Der geometrische Abweichungsfaktor ist wie folgt definiert:

$$\frac{d_\mathrm{el}}{l_\mathrm{el}} < 0.2, \tag{1}$$

wobei d_el der Abstand zwischen verzerrter und ideal unverzerrter Elementkante und l_el die Länge dieser Elementkante ist. Beträgt der Faktor einen Wert kleiner als 0.2, ist eine ausreichende Netzqualität sichergestellt. Die Grenzwerte für die einzelnen Kriterien können in ABAQUS manuell geändert werden. Die Balkenstruktur wird für die ersten zwei Biegemoden in Bereiche hoher und niedriger Verformungsenergie E_s unterteilt, was in Abbildung 3 dargestellt ist. Mit Anwendung der Netzkriterien wird eine bestimmte Anzahl von Elementen in den jeweiligen Bereichen manuell verzerrt und die berechneten Eigenfrequenzen mit einem Referenzmodell verglichen, welches ein reguläres Netz besitzt. Das Modell wird mit dem quadratischen Element C3D20 und dem linearen Element C3D8 mit einer Elementkantenlänge von 0.005 m und einer Schicht über der Höhe H des Balkens vernetzt. Die maximale relative Abweichung ε_max

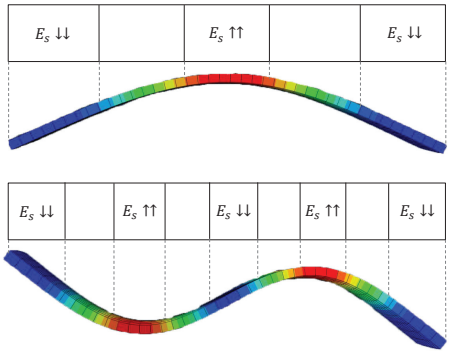

Abbildung 3: Bereiche hoher und niedriger Verformungsenergie E_s für die ersten zwei Biegemoden der Balkenstruktur

des Modells mit verzerrten Elementen und dem Referenzmodell ist durch Gleichung 2 beschrieben:

$$\varepsilon_{\max} = \left(\frac{f_d}{f_r} - 1\right) \times 100, \qquad (2)$$

wobei f_d und f_r die Eigenfrequenzen der Biegemoden aus den FE–Modellen mit und ohne verzerrte Elementen sind. Die maximale Anzahl an verzerrten Elementen beträgt 10% der Gesamtelementanzahl des FE–Modelles.

Für das Modell mit den C3D20 Elementen ergeben sich für die erste und zweite Biegemode eine maximal relative Abweichung $\varepsilon_{\max}$ für verzerrte Elemente in Bereichen hoher Verformungsenergie von 0.62% und 0.5%. Für das Modell mit linearen Elementen von 1.4% und 1.1%. Der Einfluss von verzerrten Elementen in Bereichen niedriger Verformungsenergie ist für das Modell mit quadratischen Elementen vernachlässigbar. Für das Modell mit linearen Elementen lässt sich für die erste Biegemode eine konstante relative Abweichung von 0.6% zum Referenzmodell feststellen.

Messaufbau

Eine weitere Unsicherheit in der Modellbildung physischer Modelle ist der Messaufbau. In diesem Abschnitt wird der dynamische Einfluss eines Beschleunigungsaufnehmers (BA) auf eine Balkenstruktur untersucht. Dazu werden die Ergebnisse aus der EMA für die ersten drei Biegeeigenfrequenzen von 10 Aluminiumbalken und 10 Stahlbalken mit zwei verschiedenen Messmethoden, die oben bereits näher beschrieben wurden, verglichen. Als Referenz dient die berührungslose Messmethode mit einer Anregung mittels Schall und dem Messen der Schwingungsantwort durch ein Laser–Doppler-Vibrometer. Eine weitere Messmethode verwendet als Anregung einen Impulshammer und zum Messen der Strukturantwort einen BA. Der BA wird am freien Ende des Balkens angebracht. Das arithmetische Mittel der relativen Abweichung über 10 Proben ε_{P_i} ist in Gleichung 3 definiert.

$$\varepsilon_{P_i} = \left(\frac{f_{H_i}}{f_{LDV_i}} - 1\right) \times 100 \qquad (3)$$

Tabelle 2: Arithmetisches Mittel der relativen Abweichung über 10 Proben für die ersten drei Eigenfrequenzen der Biegemoden; $i = 1, 2, 3$

	Stahl	Aluminium
ε_{P_1}	−0.24%	−0.46%
ε_{P_2}	−0.23%	−0.62%
ε_{P_3}	−0.21%	−0.49%

f_{H_i} sind die ermittelten Eigenfrequenzen der Biegemoden aus den Resonanzfrequenzen der EMA mittels Impulshammer und BA und f_{LDV_i} sind die Ergebnisse des berührungslosen Messverfahrens. Das Verhältnis der Masse des Beschleunigungsaufnehmers und der Masse der Stahlbalken liegt bei 1/100 und für die Aluminiumbalken bei 1/35. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt. Feststellbar ist, dass aufgrund des Zuwachses der Gesamtmasse des schwingenden Systems durch den Beschleunigungsaufnehmer die ermittelten Eigenfrequenzen niedriger sind. Beachtlich ist, dass trotz des großen Masseverhältnisses der Einfluss des Beschleunigungsaufnehmers deutlich messbar ist.

Randbedingung

In diesem Abschnitt diskutieren die Autoren den Einfluss von Vereinfachungen in FE–Modellen durch idealisierte Randbedingungen. Für diese Studie werden die Stahlproben der Balken mit Endmasse verwendet. Die arithmetisch gemittelte Masse der Teil des Balkens über sechs Proben beträgt $0.23kg$. Der Teil der Endmasse besitzt eine mittlere Masse von $3.3kg$. Zur Reduzierung der Freiheitsgrade des FE–Modells wird die Endmasse am Balkenende durch eine ideal feste Einspannung ersetzt, was als Kragbalken in der Literatur bekannt ist. Die Lösungen der ersten drei Biegeeigenfrequenzen des Kragbalkens werden mit den Ergebnissen der EMA der Balken mit Endmasse verglichen. Es wird eine gemittelte relative Abweichung über 6 Proben für die ersten drei Biegeeigenfrequenzen von 28%, 2% und 1% festgestellt. Um die große Abweichung, vor allem bei der ersten Eigenfrequenz erklären zu können, werden in Abbildung 4 die zu den Eigenfrequenzen gehörenden Eigenmoden näher betrachtet. Für die zweite und dritte Eigenfrequenz sind die Moden nahezu identisch, was durch eine ähnliche Lage der Knotenpunkte bekräftigt wird. Für die 1. Biegemode weicht die Position des Knotenpunktes zwischen Kragbalken und Balken mit Endmasse stark ab. Es liegen unterschiedliche Modenformen vor, die einen Vergleich der zugehörigen Eigenfrequenzen nicht zulassen. Der Knotenpunkt, der normalerweise an der ideal festen Einspannung liegt, wandert mit höher werdender Biegeeigenfrequenz in Richtung der Endmasse. Das hat eine geringere Abweichung zur Folge.
Untersuchungen haben ergeben, dass bei der selben Steifigkeit die Masse der Endmasse um das 370-fache höher sein sollte als die des Balkens, um eine Vereinfachung durch eine ideal feste Einspannung zu legitimieren.

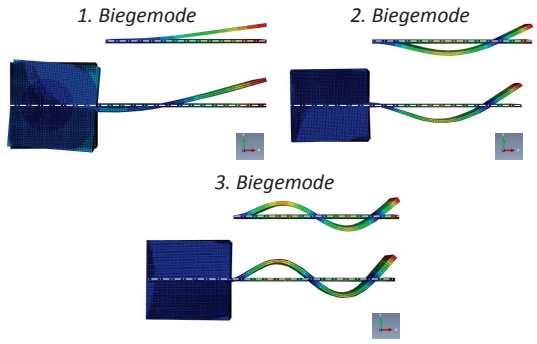

Abbildung 4: Vergleich der Eigenmoden der FE–Modelle von Kragbalken und frei-frei gelagertem Balken mit Endmasse

Tabelle 3: Balken mit Endmasse - Arithmetisch gemittelte relative Abweichung von 6 Proben ε_{i} der ersten drei Eigenfrequenzen der Biegemoden; $i = 1, 2, 3$

	Aluminium (ENAW2014)		Stahl (C45)	
	C3D20	C3D10M	C3D20	C3D10M
ε_1	0.37%	−0.09%	1.16%	0.58%
ε_2	0.45%	−0.06%	0.95%	0.36%
ε_3	0.36%	−0.16%	0.91%	0.31%

Vergleich der Modelltypen

In diesem Kapitel werden die Lösungen der FE–Modelle, die ersten drei Eigenfrequenzen der Biegemoden, mit den Ergebnissen der EMA verglichen. Die FE–Modelle sind mit dem zuvor definierten effizienten Netz vernetzt. Abbildung 5 zeigt beispielhaft die Ergebnisse der Balken mit Endmasse (C45). Die Schlauchform ergibt sich für jede Probe aus den zuvor beschriebenen Modell- und Parameterunsicherheiten. Innerhalb dieser Ober- und Untergrenzen der Eigenfrequenzen aus den FE–Modellen liegen die Ergebnisse der EMA. Die virtuellen Modelle bilden somit jegliches wahrscheinliches Ergebnis aus dem Experiment ab. Ebenso ist der Schluss zulässig, das die FE–Modelle die Realität in hohem Maße abbilden. Diese Aussagen lassen sich auch aus den Untersuchungen der einfachen Balkenstrukturen und der Balken mit Endmasse (Aluminium) treffen. Tabelle 3 zeigt die arithmetisch gemittelte relative Abweichung $\varepsilon_{P_{\mathrm{i}}}$ über 6 Proben der Balken mit Endmasse zwischen Experiment und FE–Modell. Die relativen Abweichungen für die einfachen Balkenstrukturen zwischen FE–Modellen und Experiment sind vergleichbar gering.

Zusammenfassung

Diese Arbeit bietet eine Empfehlung in Bezug auf die Feinheit der Diskretisierung in FE–Modellen für konvergierte Lösungen bei einfachen Strukturen. Es wir deutlich, dass die Qualität eines Netzes von der Anzahl an verzerrten Elementen sowie deren Lage in Bezug auf die betrachtete Eigenmode der Geometrie abhängig ist. Es bietet dem Ingenieur eine Vorstellung, in welchem Maße sich Ergebnisse aus einem berührungslosem und einem nicht berührungslosem Messverfahren bei der experimentellen Modalanalyse unterscheiden. Die Unsicher-

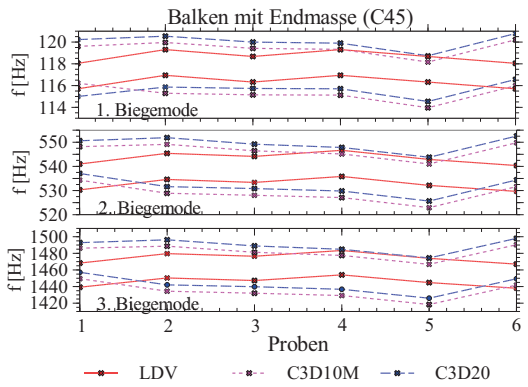

Abbildung 5: Ersten drei Eigenfrequenzen der Biegemoden mit Betrachtung der Unsicherheiten der Balken mit Endmasse (Stahl–C45)

heiten der Materialeigenschaften, insbesondere des Elastizitätsmoduls E, haben im Vergleich zu dem Fehler durch die Diskretisierung mit ausreichenden Freiheitsgraden einen erheblich größeren Einfluss auf die Eigenfrequenzen von Biegeschwingungen. Vereinfachungen in der Modellierung von FE–Modellen, wie durch eine ideal starre Einspannung des schwingenden Systems, werden kritisch analysiert und haben besonders für die niedrigen Eigenfrequenzen einen großen Einfluss. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der experimentellen Modalanalyse zeigt, dass die FE–Modelle die Realität in einem hohen Maße abbilden, da ausschließlich Abweichungen von $< 1\%$ festgestellt wurden. Dies gilt sowohl für die einfachen Balkenstrukturen und ebenso für die Balken mit Endmasse. Daraus folgt, dass mit der hinzugefügten Komplexität durch die Endmasse, die Genauigkeit der Ergebnisse der FE–Modelle im Vergleich zur Realität konstant bleibt.

Literatur

[1] Roger G. Ghanem: Uncertainty Quantification in Computational and Prediction Science. International Journal for Numerical Methods in Engineering 80 (2009), 671–672

[2] G. Sargent: Verification and Validation of Simulation Models. Winter Simulation Conferences (2005), 53–59

[3] S. Marburg, H.–J. Beer, J. Gier und H.–J. Hardtke: Experimental verification of structural–acoustic modelling and design optimization. Journal of Sound and Vibration 252 (2002), 591–615

[4] K. Sephavand und S. Marburg: On construction of uncertain material parameter using generalized polynomial chaos expansion from experimental data. IUTAM Symposium on Multiscale Problems in Stochastic Mechanics (2012), 4–17

[5] Abaqus User and Theory Manual 6.10-3.