Hemi-Spherical Harmonics – Verarbeitung von Messdaten auf Halbkugelschalen

Markus Müller-Trapet[1], Michael Vorländer[1]

[1] *Institut für Technische Akustik, RWTH Aachen, 52074 Aachen, Deutschland, Email: mmt@akustik.rwth-aachen.de*

Einleitung

Die Signalverarbeitung von Messdaten für Mikrofonanordnungen in Form von Kugelschalen hat sich schon beinahe zu einem Standard-Werkzeug in der Akustik entwickelt [1]. Dies liegt vor allem an der recht einfachen Implementierung von örtlichen Filtermethoden wie Beamforming [2] oder Nahfeldholographie [3, 4] in der Domäne der *Spherical Harmonics* (SH). Unter Umständen kann jedoch nicht immer eine Vollkugel mit Mikrofonen abgetastet werden, entweder weil der mechanische Aufbau es nicht zulässt oder weil es für die bestimmte Anwendung nicht sinnvoll ist.

In diesem Beitrag wird die SH-Zerlegung des Schallfeldes, das auf einer Halbkugelschale bestimmt wurde, untersucht. Der Anwendungsfall liegt hierbei in der Messung von winkelabhängigen Reflexionseigenschaften von Oberflächen mit einem sequentiellen Halbkugelarray [5]. Die örtlichen Filtermethoden können dabei sinnvoll eingesetzt werden um zum Beispiel das Referenzsignal der Schallquelle zu erhalten oder Einflüsse von unerwünschten Reflexionen zu vermindern.

Der Messaufbau über einem Absorber inklusive der Array-Halterung ist in Abb. 1 gezeigt.

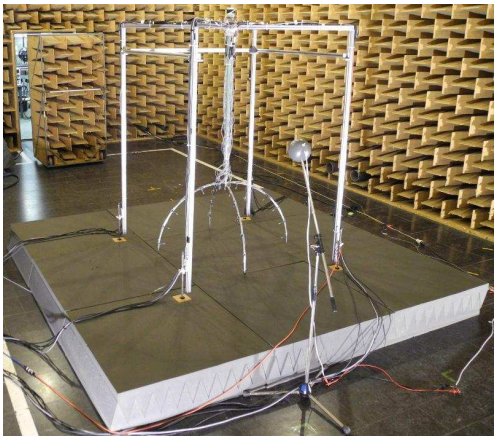
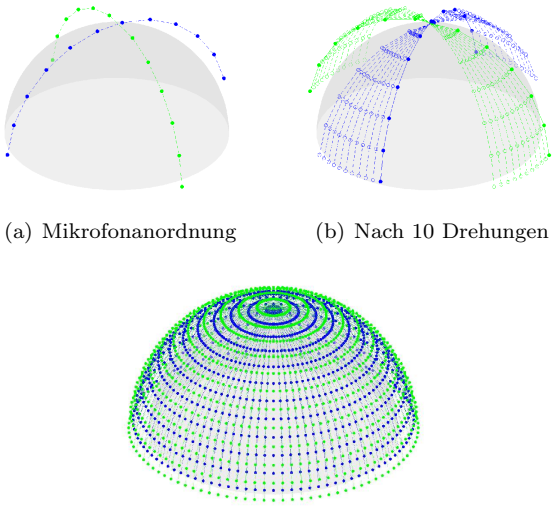


Abbildung 1: Array-Aufbau zur Messung von winkelabhängigen Reflexionseigenschaften über einem Absorber im reflexionsarmen Raum

Um die Idee und den Aufbau des sequentiellen Arrays zu verdeutlichen sind in Abb. 2 die Mikrofonpositionen der eigentlichen Mikrofonanordnung (Abb. 2(a)) sowie der Positionen nach 10 (Abb. 2(b)) bzw. 96 Drehungen (Abb. 2(c)) des Arrays dargestellt. Hierbei sind 24 Mikrofone im Einsatz, die auf 2 Halbkreisen mit verschiedenen Radien von $r_1 = 0.512\,\mathrm{m}$ und $r_2 = 0.527\,\mathrm{m}$ verteilt sind. Die Schrittweite bei der Drehung des Arrays beträgt 3.75 Grad und die Drehung wurde mittels eines Schrittmotors ausgeführt, der über eine Welle mit dem Array verbunden ist. Das Gesamtarray folgt einem Gauss-Quadratur Sampling für eine maximale SH-Ordnung (bezogen auf die Vollkugel) von $N_{\max} = 23$. Insgesamt führt dies zu 2304 Messpositionen auf der Halbkugel.



(a) Mikrofonanordnung (b) Nach 10 Drehungen

(c) Nach 96 Drehungen (komplette Rotation)

Abbildung 2: Schematischer Aufbau des sequentiellen Mikrofonarrays

Orthonormale Basisfunktionen auf der Halbkugel

Für die SH-Zerlegung von Daten auf Halbkugelschalen wird ein neues Set von orthonormalen Basisfunktionen benötigt, da die originalen Spherical Harmonics nur auf der Vollkugel orthonormal sind. Es gibt andere Methoden, um die SH-Zerlegung auch für Anordnungen, die keine volle Kugel abdecken, durchzuführen, wie etwa eine Zerlegung mittels regularisierter Invertierung der SH-Funktionen [6]. Dieses Verfahren wird jedoch für große Lücken instabil, ist also für Halbkugeln nicht geeignet.

Es ist prinzipiell möglich, eventuell vorhandene Symmetrien im Aufbau auszunutzen und so nur ein Subset der Spherical Harmonics auszuwählen [7]. In dem hier gezeigten Anwendungsfall wäre eine Symmetrie bezüglich der xy-Ebene zum Beispiel bei Messungen über einem perfekt reflektierenden Boden gegeben. Da jedoch diese Annahme bei Messungen über großen Absorberproben keineswegs gilt, würde die Zerlegung fehlerhafte Ergebnisse liefern.

Aus diesem Grund wird hier der Ansatz benutzt, wie er von Pail et al. [8] vorgestellt wurde. Das Ziel ist dabei die Berechnung einer Rekonstruktionsmatrix $\mathbf{R}$, die die Beziehung zwischen den originalen SH-Funktionen und den neuen Funktionen $\hat{\mathbf{Y}}$ für den Subraum $\hat{\mathbf{S}}$ herstellt:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}_{\hat{S}} \mathbf{R}^{+} \,. \tag{1}$$

Hierbei stellt $\mathbf{R}^{+}$ die Pseudo-Inverse der Rekonstruktionsmatrix dar. Die Rekonstruktionsmatrix kann dann auch benutzt werden, um (den Vektor von) SH-Koeffizienten auf der Vollkugel $\mathbf{p_{nm}}$ in Koeffizienten für das neue Basissystem $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{nm}}$ umzurechnen:

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{nm}} = \mathbf{R}\, \mathbf{p_{nm}} \,. \tag{2}$$

Der Vorteil bei diesem Ansatz ist, dass die Konvertierung zwischen den beiden Systemen von Basisfunktionen möglich ist, wodurch insbesondere die örtlichen Filtermethoden über die Spherical Harmonics und die dazugehörigen Radialfilter benutzt werden können.

Die sogenannte Gram-Matrix $\mathbf{G}$ wird als zentrales Element für die Berechnung der Rekonstruktionsmatrix benutzt. Die Gram-Matrix wird durch eine Integration der SH-Basisfunktionen $\underline{Y}_n^m$ für alle Kombinationen von Ordnung n und Grad m über dem Subraum $\hat{S}$ (hier die Halbkugel) berechnet. Für die diskrete Berechnung kann die Integration durch ein Matrixprodukt dargestellt werden:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Y}_{\hat{S}}^{H}\, \mathbf{W}_{\hat{S}} \mathbf{Y}_{\hat{S}} = \mathbf{R}^{H}\, \mathbf{R} \,, \tag{3}$$

wobei $\mathbf{Y}_{\hat{S}}$ und $\mathbf{W}_{\hat{S}}$ die Matrizen der SH-Basisfunktionen und der zu dem Sampling gehörenden Gewichte bezeichnen. $\mathbf{Y}^{H}$ ist die komplex-konjugierte Matrix zu $\mathbf{Y}$.

Der erste Schritt besteht nun in der reduzierten Singulärwertzerlegung der symmetrischen Matrix $\mathbf{G}$ um die Konditionszahl zu verbessern:

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}\, \mathrm{diag}\{\mathbf{s}\} \mathbf{V}^{H} \,. \tag{4}$$

Bei der Analyse der Singulärwerte zeigt sich, dass diese für hohe Ordnungen schnell im Wert abfallen. Um dies zu verdeutlichen sind in Abb. 3 die Singulärwerte der Gram-Matrix in dB als Funktion der Ordnung n und des Grades m dargestellt. Für die hier vorliegenden Daten zeigte sich, dass eine Beschränkung auf einen Dynamikbereich von etwa 60 dB zu stabilen Ergebnissen führt, was eine Reduktion der maximalen Ordnung der neuen Basisfunktionen auf $\hat{N}_{\max} = 17$ zur Folge hat.

Durch Ausnutzung der Symmetrie der Gram-Matrix kann Gl. (4) als doppeltes Matrixprodukt repräsentiert werden, welches mithilfe der QR-Zerlegung in Verbindung mit der Rekonstruktionsmatrix gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{V}\, \mathrm{diag}\{\mathbf{s}\} \mathbf{V}^{H} \,, \\ &= \mathbf{V}\, \mathrm{diag}\{\mathbf{s}^{1/2}\}\, \mathrm{diag}\{\mathbf{s}^{1/2}\} \mathbf{V}^{H} \,, && (5) \\ &= \mathbf{R}^{H} \mathbf{Q}^{H} \mathbf{Q}\, \mathbf{R} \,. && (6) \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass $\mathbf{Q}$ eine unitäre Matrix ist, dass also $\mathbf{Q}^{H}\, \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ mit $\mathbf{I}$ als Einheitsmatrix.

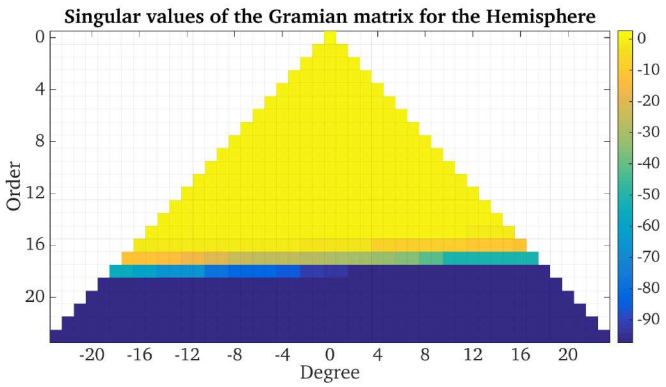


Abbildung 3: Singulärwerte der Gram-Matrix in dB für die Halbkugel als Funktion von Ordnung n und Grad m

Mit der QR-Zerlegung von Gl. (5) erhält man einen expliziten Ausdruck für die Rekonstruktionsmatrix:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{H}\, \mathrm{diag}\{\mathbf{s}^{1/2}\} \mathbf{V}^{H} \,. \tag{7}$$

Die ersten 16 komplexwertigen Basisfunktionen auf der Halbkugel berechnet mit Gl. (1) sind in Abb. 4 gezeigt.

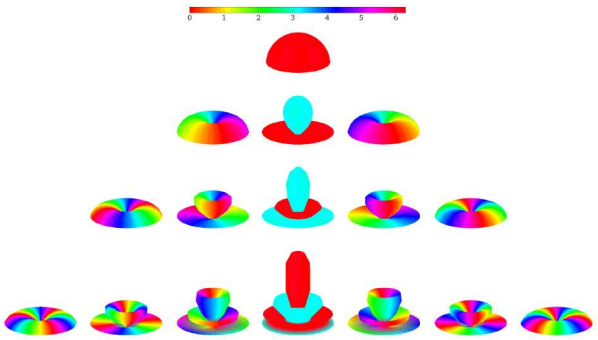
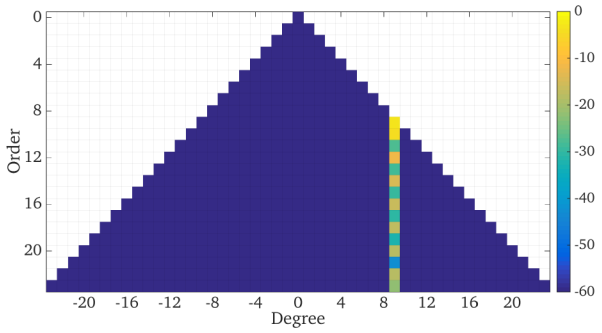


Abbildung 4: Die ersten 16 komplexwertigen Basisfunktionen $\underline{Y}_{n'}^{m'}$ auf der Halbkugel

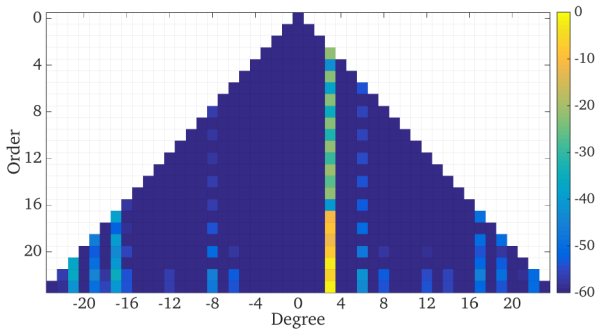
Um die Transformation zwischen den Hemispherical und Spherical Harmonics zu untersuchen, wurde die Pseudo-Inverse der Rekonstruktionsmatrix $\mathbf{R}^{+}$ analysiert. Die Spalten dieser Matrix bestimmen die Linearkombination der Spherical Harmonics Basisfunktionen $\underline{Y}_n^m$, die zu einer Hemispherical Harmonic $\underline{Y}_{n'}^{m'}$ führen.

In Abb. 5 sind die Einträge der Spalten von $\mathbf{R}^{+}$ in dB geplottet als Funktion der Ordnung n und des Grades m für die Original-SH. Dies ist für zwei Hemispherical Harmonics durchgeführt worden: einmal für Ordnung $n' = 9$ und Grad $m' = 9$ (Abb. 5(a)) und einmal für Ordnung $n' = 12$ und Grad $m' = 3$ (Abb. 5(b)).

Aus den Daten lässt sich schließen, dass die Rekonstruktionsmatrix für niedrige Ordnung dünn besetzt ist und eine Hemispherical Harmonic $\underline{Y}_{n'}^{m'}$ eine Linearkombination der Spherical Harmonics vom gleichen Grad und der gleichen Ordnung und allen höheren Ordnungen ist. Für höhere Ordnungen ($n' \geq 12$) scheint dies nicht mehr zu gelten und es kommt zu einer größeren Vermischung von Ordnungen und Graden der Spherical Harmonics in einer Hemispherical Harmonic. Dies könnte zu einer instabilen Transformation zwischen den Basen auf der Voll-



(a) $\mathbf{R}^{+}(n' = 9, m' = 9)$



(b) $\mathbf{R}^{+}(n' = 12, m' = 3)$

Abbildung 5: Spalten der Pseudo-Inversen $\mathbf{R}^{+}$ als Funktion von Ordnung n und Grad m für zwei Kombinationen von n' und m'

und Halbkugel führen. Der Einfluss in der tatsächlichen Anwendung muss aber noch untersucht werden.

Analytische Beispielrechnung

Um die Anwendbarkeit der beschriebenen Methode zur Bestimmung der orthonormalen Basisfunktionen zu testen wurden beispielhaft Berechnungen mit Punktschallquellen durchgeführt. Dazu wurde das Schallfeld mit der Green'schen Funktion sowohl im Ortsbereich als auch im SH-Bereich berechnet. Für die Halbkugel wurde die analytische Berechnung im SH-Bereich mit Gl. (2) transformiert. Durch die Berechnung im Orts- und SH-Bereich kann der Einfluss von Ortsaliasing besser bestimmt werden, da die Berechnungen in der SH-Domäne frei von Aliasing sind und die Genauigkeit nur von der maximalen SH-Ordnung abhängt. Die Frequenz für Aliasing über dem Winkel lag für die benutzten Arrays bei circa 2.2 kHz.

Für die analytischen Berechnungen wurde das Test-Szenario in Abb. 6 benutzt, bei dem zwei Quellen außerhalb der Arrays und eine innerhalb platziert wurden. Die Quellstärke war über der Frequenz konstant und es wurde eine Samplingrate von 10 kHz gewählt.

Das so berechnete Schallfeld wurde dann sowohl auf der Vollkugel als auch auf der Halbkugel in Spherical bzw. Hemispherical Harmonics zerlegt, jeweils für alle Quellen einzeln und für die Überlagerung der drei Quellen. Zur Validierung wurde der normierte Ortskorrelationskoeffizient zwischen der analytischen Lösung und der

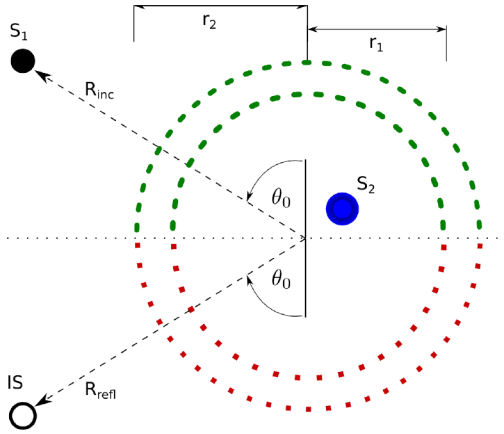
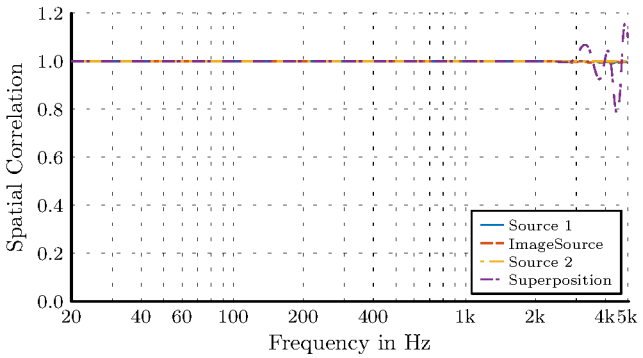
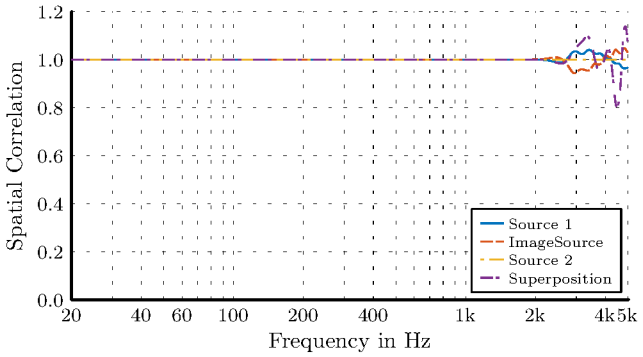


Abbildung 6: Test-Szenario mit Punktschallquellen für die Zerlegung mit Hemispherical Harmonics

SH-Transformation benutzt. Dieser ist ein Maß für die Ähnlichkeit der Ergebnisse sowohl bezüglich der Form als auch bezüglich der Amplitude. Im Idealfall perfekter Übereinstimmung sollte der Wert genau gleich eins sein. Die Ergebnisse sind in Abb. 7 für die Vollkugel (Abb. 7(a)) und für die Halbkugel (Abb. 7(b)) zu sehen.



(a) Spherical Harmonics



(b) Hemispherical Harmonics

Abbildung 7: Ortskorrelation zwischen analytischer Berechnung und Zerlegung mittels Basisfunktionen

Die Tatsache, dass die Korrelation bis zur Aliasingfrequenz genau eins beträgt, zeigt, dass die Zerlegung mit den Hemispherical Harmonics sehr gut funktioniert. Oberhalb von 2.2 kHz schwankt die Korrelation stärker als für die Berechnungen auf der Vollkugel, was aber nicht von Bedeutung ist, da die Ergebnisse in jedem Fall auf-

grund von Aliasing unbrauchbar werden. Für die Quelle innerhalb des Arrays liegt die Aliasingfrequenz oberhalb von 5 kHz, weshalb die Korrelation für diese Quelle stets eins ist.

Im Weiteren wurde die Transformation der Koeffizienten für die Halbkugel zurück in den SH-Bereich getestet. Dazu wurde der anfangs beschriebene Anwendungsfall der örtlichen Filterung benutzt. Um das Ergebnis im Idealfall zu analysieren wurde das Schallfeld für nur eine Quelle außerhalb des Arrays (S_1 in Abb. 6) berechnet und dann mithilfe von Beamforming und Nahfeldholographie das Quellensignal rekonstruiert. Das Originalsignal und das Ergebnis der Rekonstruktion ist in Abb. 8 als Funktion der Frequenz gezeigt.

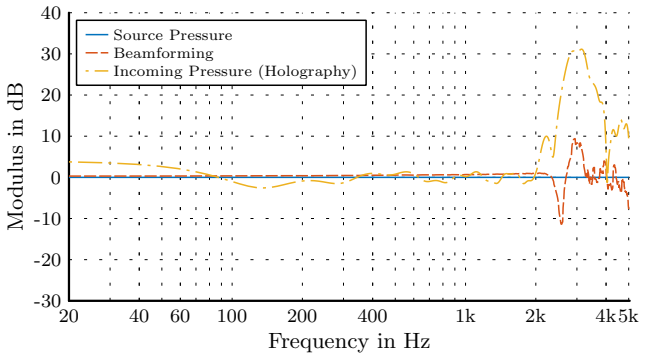


Abbildung 8: Quellensignal im Original und mit Beamforming und Nahfeldholographie rekonstruiert

Man kann an den Daten erkennen, dass die Beamforming-Berechnung bis zur Aliasingfrequenz von etwa 2.2 kHz ein sehr gutes Ergebnis liefert, das um weniger als 1 dB vom Originalsignal abweicht. Im Vergleich dazu ist das Ergebnis der Nahfeldholographie recht instabil mit deutlichen Pegelschwankungen von bis zu 3 dB über der Frequenz. Dies deutet darauf hin, dass das Verfahren der Nahfeldholographie sehr anfällig für numerische Ungenauigkeiten, wie sie bei der Transformation mit Gl. (2) auftreten können, ist. Es zeigt sich auch, dass der Einfluss von Aliasing deutlich höher für die Nahfeldholographie ist, da die Fehler im Vergleich zum Beamforming um 20 dB höher ausfallen.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein Verfahren untersucht, mit dem man Daten auf Halbkugelschalen so mit orthonormalen Basisfunktionen zerlegen kann, dass das Ergebnis in Beziehung zu den Spherical Harmonics gesetzt werden kann.

Dazu wurden zunächst aus der Gram-Matrix eine Rekonstruktionsmatrix bestimmt, mit deren Hilfe komplexe, orthonormale Basisfunktionen auf der Halbkugel berechnet werden können. Diese Basisfunktionen wurden dann genutzt um ein analytisch berechnetes Schallfeld mit Punktschallquellen sowohl auf der Voll- als auch auf der Halbkugel zu zerlegen. Es wurde eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen festgestellt, die nur von der Aliasingfrequenz des Arrays vermindert wurde. Dies bedeutet, dass die berechneten Basisfunktionen sich gut zur Transformation des Schallfeldes nutzen lassen.

Als weiteren Anwendungsfall wurden Methoden der örtlichen Filterung benutzt, um das Signal einer Punktschallquelle zu rekonstruieren. Dabei war das Beamforming-Ergebnis sehr gut und nur geringe Abweichungen zum Originalsignal waren zu beobachten. Das Ergebnis der Nahfeldholographie war jedoch mit höheren Pegelschwankungen nicht zufriedenstellend, was auf eine hohe Anfälligkeit für numerische Ungenauigkeiten schließen lässt.

Die hier gezeigten Basisfunktionen können nun für die Transformation von Messdaten benutzt werden. Es muss untersucht werden, ob die guten Beamforming-Ergebnisse auch bei realen Daten erreicht werden können. Es bleibt auch zu untersuchen, inwieweit sich das Ergebnis für die Nahfeldholographie verbessern lässt. Dies kann zum Beispiel durch weitere Analyse der Rekonstruktionsmatrix und eine eventuelle Ordnungsbegrenzung geschehen.

Literatur

[1] F. Zotter. *Analysis and Synthesis of Sound-Radiation with Spherical Arrays.* PhD thesis, University of Music and Performing Arts, Graz, Austria, 2009.

[2] B. Rafaely. Phase-mode versus delay-and-sum spherical microphone array processing. *Signal Processing Letters, IEEE*, 12(10):713 – 716, oct. 2005.

[3] G. Weinreich and E. B. Arnold. Method for measuring acoustic radiation fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(2):404–411, 1980.

[4] M. Müller-Trapet, M. Pollow, and M. Vorländer. Application of scattering nearfield holography to in-situ measurements of sound absorption. In *AIA-DAGA, Meran, Italy*, 2013.

[5] M. Müller-Trapet and M. Vorländer. In-situ measurements of surface reflection properties. *Building Acoustics*, 21(2):167–174, 2014.

[6] M. Pollow, K.-V. Nguyen, O. Warusfel, T. Carpentier, M. Müller-Trapet, M. Vorländer, and M. Noisternig. Calculation of head-related transfer functions for arbitrary field points using spherical harmonics decomposition. *Acta Acustica united with Acustica*, 98(1):72–82, 2012.

[7] H. Pomberger and F. Zotter. An ambisonics format for flexible playback layouts. In *1st Ambisonics Symposium, Graz, Austria*, 2009.

[8] R. Pail, G. Plank, and W.-D. Schuh. Spatially restricted data distributions on the sphere: the method of orthonormalized functions and applications. *Journal of Geodesy*, 75(1):44–56, 2001.