

# Vergleich frequenzabhängiger und –unabhängiger Moden der Schallabstrahlung akustischer Außenraumprobleme

Lennart Moheit<sup>1</sup>, Steffen Marburg

Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr München, 85577 Neubiberg, Deutschland

<sup>1</sup> Email: lennart.moheit@unibw.de

## Einleitung

Zur modalen Beschreibung des akustischen Außenraumproblems werden in der Literatur zwei Arten von Moden diskutiert. Das Eigenwertproblem der reellen Impedanzmatrix liefert die von der Frequenz abhängigen *acoustic radiation modes* und wird zunächst von Borgiotti [1] und von Sarkissian [2] untersucht. Cunefare und Currey [3–5] erweitern diese Betrachtungen um Untersuchungen zum akustischen Abstrahlgrad und dessen Gruppierungsverhalten. Peters et. al [6] behandeln die Symmetrieeigenschaften der Impedanzmatrix, welche mittels Randelementmethode geliefert wird und in der Regel erst symmetrisch gemacht werden muss. Dagegen finden die Eigenvektoren der Systemmatrizen im Zustandsraum, bekannt als *normal modes*, in der Außenraumakustik bisher nur wenig Anwendung. Marburg et al. [7–9] stellen am Beispiel zweier Strukturen umfangreiche Untersuchungen zu den *normal modes* unter dem Einfluss verschiedener Netzdiskretisierungen im Hinblick auf die abgestrahlte Schallleistung an.

Gegenstand dieses Papers soll der Vergleich beider Modenformen am Beispiel einer offenen Struktur sein.

## Theorie

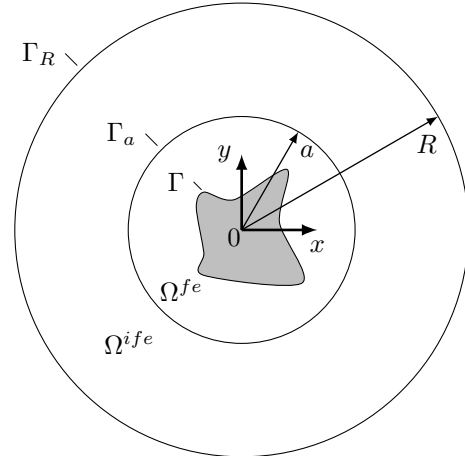
Das zweidimensionale Randwertproblem für den zeitlich harmonischen Schalldruck  $\hat{p}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  für das fluid-gefüllte Gebiet  $\Omega = \Omega^{fe} \cup \Omega^{ife}$  (vgl. Abb. 1) wird beschrieben durch die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

mit der Wellenzahl  $k = \omega/c_f$ . Auf der Oberfläche der schwingenden Struktur  $\Gamma$  seien die Schnellen der Partikel im Fluid und die der Struktur gleich  $v_f = v_s$ . Um das akustische Außenraumproblem beschreiben zu können, erfordert die Lösung des Randwertproblems zusätzlich die Erfüllung der Sommerfeld'schen Abstrahlbedingung im Unendlichen ( $\Gamma_R$  für  $R \rightarrow \infty$ , vgl. [10]). Diese wird in der Formulierung der infiniten Elemente (IFE) in  $\Omega^{ife}$  bereitgestellt, welches an den äußeren Rand  $\Gamma_a$  des inneren Gebietes der finiten Elemente (FE) in  $\Omega^{fe}$  anschließt. Die Diskretisierung des Fluids mittels finiter und infiniten Elemente liefert ein lineares Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = i\omega\rho_f\mathbf{\Theta}\mathbf{v}_s = \mathbf{f} \quad (2)$$

mit der Steifigkeits-, Dämpfungs- und Massenmatrix  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{M}$ . Die rechte Seite von Gl. (2) beinhaltet die Dichte des Fluids  $\rho_f$ , eine Schnelleanregung an den Netzknoten auf der Struktur  $\mathbf{v}_s$  und die Randmassenmatrix



**Abbildung 1:** Vibrierender Festkörper umgeben von einem Fluid in einem kreisförmigen, FE-diskretisierten Gebiet  $\Omega^{fe}$  und einem Gebiet infiniten Elemente  $\Omega^{ife}$ .

$\mathbf{\Theta}$ , welche nach [11] in diskreter Form definiert ist als

$$\mathbf{\Theta} = \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x})\Phi^T(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Die in dieser Definition auftretenden Basisfunktionen  $\Phi(\mathbf{x})$  stammen aus der Diskretisierung von Druck und Schnelle gemäß

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_l(\mathbf{x})p_l = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{p}, \quad (4)$$

$$v_s(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_l(\mathbf{x})v_{s,l} = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{v}_s. \quad (5)$$

Die diskrete Form der Schallleistung ist definiert als

$$P = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{p}_{\Gamma}^T \mathbf{\Theta}_{\Gamma} \mathbf{v}_{\Gamma}^* \}, \quad (6)$$

wobei der Index  $\Gamma$  jene Freiheitsgrade bezeichnet, die mit der Oberfläche der Struktur assoziiert sind. Mittels Inversion der dynamischen Steifigkeitsmatrix ( $\mathbf{A} = \mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M}$ ) lässt sich Gl. (2) nach dem Vektor der Knotenwerte des Druckes  $\mathbf{p}$  umstellen, sodass die Schallleistung nach Gl. (6) bestimmt werden kann

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re \{ (\mathbf{A}_{\Gamma}^{-1} \mathbf{f}_{\Gamma})^T \mathbf{\Theta}_{\Gamma} \mathbf{v}_{\Gamma}^* \} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{f}_{\Gamma}^T \mathbf{A}_{\Gamma}^{-T} \mathbf{\Theta}_{\Gamma} \mathbf{v}_{\Gamma}^* \} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{\Gamma}^T \underbrace{\Re \{ i\omega\rho_f \mathbf{\Theta}_{\Gamma}^T \mathbf{A}_{\Gamma}^{-T} \mathbf{\Theta}_{\Gamma} \}}_{=\mathbf{Z}} \mathbf{v}_{\Gamma}^*. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Matrix  $\mathbf{Z}$  wird als Impedanzmatrix bezeichnet.

## Moden der Schallabstrahlung

### Frequenzunabhängige normal modes

Zur Bestimmung der *normal modes* wird das diskrete Gleichungssystem mit Matrizen der Größe  $N \times N$  aus Gl. (2) in den Zustandsraum überführt

$$(\mathbf{A} + ik\mathbf{B})\mathbf{z} = \mathbf{r} \quad (8)$$

mit  $\mathbf{r}^T = [\mathbf{0}, -\mathbf{f}] = [\mathbf{0}, -i\omega\rho_f\Theta\mathbf{v}_s]$  und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -ik\mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}.$$

Aufgrund der komplexen Konjugation der Testfunktionen gegenüber den Ansatzfunktionen folgt, dass die von der Frequenz unabhängigen Zustandsraummatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  asymmetrisch sind. Folglich ergeben sich für das Eigenwertproblem zum Eigenwert  $\kappa = -ik$  sowohl rechts- als auch linksseitige Eigenvektoren gemäß

$$(\mathbf{A} - \kappa\mathbf{B})\mathbf{x}_z = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_z^T(\mathbf{A} - \kappa\mathbf{B}) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Die Zustandsraummatrizen lassen sich weiterhin über die modalen Matrizen diagonalisieren

$$\mathbf{Y}_z^T \mathbf{A} \mathbf{X}_z = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N-\delta}), \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}_z^T \mathbf{B} \mathbf{X}_z = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_{2N-\delta}). \quad (11)$$

Die  $2N - \delta$  Eigenwerte der *normal modes* folgen aus den Einträgen entlang der Hauptdiagonalen  $\kappa_j = \alpha_j/\beta_j$  mit  $j = 1, \dots, (2N - \delta)$ . Da sich für kreisförmige Ränder zwischen dem Gebiet der finiten und infiniten Elemente  $\Gamma_a$  Nullzeilen und -spalten in der Massenmatrix einstellen (vgl. [12]), wird in [8] eine Teilung und Reduktion der Matrizen diskutiert. Die Differenz von vollem zu verringertem Rang der Massenmatrix wird durch  $\delta$  angegeben. Reduziert man das Zustandsraumsystem auf jene unteren  $N$  Zeilen, welche mit dem Druck assoziiert sind, erhält man einen Zusammenhang zwischen den Druckwerten  $\mathbf{p}_\Gamma$  und der rechten Seite des Gleichungssystems  $\mathbf{f}_\Gamma$  auf dem Rand über die Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}_\Gamma$

$$\mathbf{p}_\Gamma = - \underbrace{\mathbf{X}_\Gamma \text{diag}\{\alpha_j + ik\beta_j\}^{-1} \mathbf{Y}_\Gamma^T}_{= \mathbf{Z}_{NM}} \mathbf{f}_\Gamma. \quad (12)$$

Eingesetzt in (6) folgt für die Schalleistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re \left\{ (-\mathbf{Z}_\Gamma \mathbf{f}_\Gamma)^T \Theta_\Gamma \mathbf{v}_\Gamma^* \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}_\Gamma^T \Re \left\{ i\omega\rho_f \underbrace{\Theta_\Gamma^T \mathbf{Z}_\Gamma^T \Theta_\Gamma}_{= \tilde{\mathbf{Z}}_{NM}} \right\} \mathbf{v}_\Gamma^* \end{aligned} \quad (13)$$

mit der Impedanzmatrix  $\tilde{\mathbf{Z}}_{NM}$ .

### Frequenzabhängige radiation modes

Die *radiation modes* sind die Eigenvektoren der reellen, frequenzabhängigen und symmetrischen Impedanzmatrix und werden in der Regel mithilfe der Randelementmethode bestimmt. In diesem Paper soll die Impedanzmatrix jedoch aus der Zerlegung der Systemmatrizen der finiten und infiniten Elemente gewonnen werden.

Hierzu wird die frequenzabhängige dynamische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{A}$  auf der linken Seite von Gl. (2) in Anteile mit Freiheitsgraden auf dem Rand (Index 1) und im Fluid (Index 2) unterteilt:

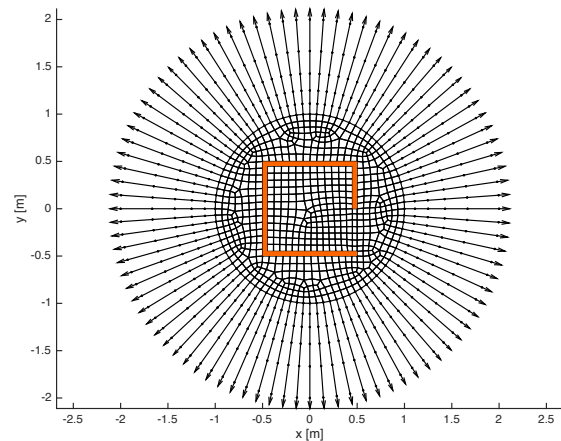
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = -i\omega\rho_f \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Die Randmassenmatrix ist lediglich auf der Struktur ungleich Null, sodass gilt  $\Theta_{12} = \Theta_{21} = \Theta_{22} = \mathbf{0}$ . Darüber hinaus beschränkt sich die Schnelleanregung auf die Strukturoberfläche und es folgt  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ . Umstellen des Gleichungssystems (14) nach  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_\Gamma$  liefert nach Einsetzen in die Gleichung (6) die diskrete Schalleistung

$$P = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_\Gamma^T \Re \left\{ i\omega\rho_f \underbrace{\Theta_{11}^T [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}]^{-T} \Theta_\Gamma}_{= \mathbf{Z}_{ARM}} \right\} \mathbf{v}_\Gamma^* \quad (15)$$

## Modell und Implementierung

Für die nachfolgenden Untersuchungen wird der kreisförmige Luftraum um die in Abb. 2 dargestellte offene Box mit finiten Elementen diskretisiert. Die Systemmatrizen und die Vernetzung werden mit COMSOL Multiphysics® gewonnen. Um das FE-Gebiet werden in Matlab die sogenannten konjugiert komplexen infiniten Astley-Leis-Elemente aufgebaut und die neuen Systemmatrizen zusammengesetzt. Für die infiniten Elemente



**Abbildung 2:** Luftraum um eine offene Box vernetzt mit finiten und infiniten Elementen der radialen Ordnung sechs.

werden Lagrange-Polynome der radialen Ordnung sechs verwendet.

## Ergebnisse

### Eigenvektoren der normal modes

In Abbildung 3 sind ausgewählte Modenformen der frequenzunabhängigen *normal modes* in Form der rechtsseitigen Eigenvektoren zum Druck dargestellt. Die zugehörigen Eigenwerte sind in Abb. 3 oberhalb der jeweiligen Modenform abgebildet. Offensichtlich führt die

einseitige Öffnung in der Struktur zur Ausprägung von Außen- als auch von Innenraummoden. So zeigt der Eigenvektor zum Eigenwert  $\kappa_1$  eine Monopolmode und die Vektoren zu den Eigenwerten  $\kappa_{13}$ ,  $\kappa_{17}$  und  $\kappa_{49}$  jeweils entsprechende Dipolmoden im Außenraum. Für  $\kappa_{47}$  lässt sich darüber hinaus eine Quadrupolmode erahnen. Innenraummoden können für  $\kappa_{10}$ ,  $\kappa_{35}$ ,  $\kappa_{40}$  und  $\kappa_{56}$  gefunden werden. Die Eigenwerte sind mit dem Faktor  $c_f/(2\pi)$

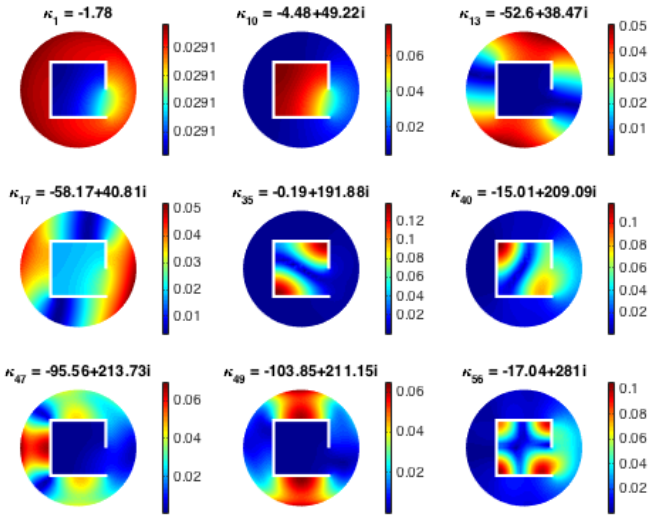


Abbildung 3: Ausgewählte *normal modes* als Rechteigenvektoren zum Druck.

skaliert, sodass sich aus deren Imaginärteil die Frequenz ablesen lässt, zu welcher die entsprechende Mode eine Resonanz zeigt. Im Realteil steckt weiterhin eine Information über die Dämpfung. So sind insbesondere jene Modenformen an der Abstrahlung von Schall beteiligt, welche aufgrund ihres geringen Realteils, schwach gedämpft schwingen, was offensichtlich insbesondere für  $\kappa_{10}$  und  $\kappa_{35}$  zu beobachten ist.

**Eigenvektoren der radiation modes**

Die Eigenwerte und -vektoren der Impedanzmatrix—bekannt als *acoustic radiation modes*—müssen im Gegensatz zu den zuvor behandelten *normal modes* nun für jede Frequenz einzeln bestimmt werden. Abbildung 4 zeigt den Verlauf der jeweils zehn größten Eigenwerte  $\lambda_j$  über einen Frequenzbereich bis 300 Hz. Die konkrete Reihenfolge der Eigenwerte lässt sich nicht ohne weiteres jederzeit präzise angeben, da diese an bestimmten Frequenzen die Positionen wechseln. Mithilfe einer MAC-Analyse (Modal Assurance Criterion) ließen sich einzelne Eigenwerte jedoch über die Frequenz verfolgen, was jedoch nicht Bestandteil dieses Papers sein soll. Deutlich wird allerdings, dass zwei der Eigenwerte, die bereits zu tiefen Frequenzen zu den zehn größten Eigenwerten zählen, um etwa 49 Hz bzw. 192 Hz eine signifikante Überhöhung zeigen. Mit einem Blick auf die Eigenvektoren der *radiation modes*, bei 10 Hz dargestellt in Abb. 5, lassen sich für  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  jene Schwingformen identifizieren, die bereits bei den *normal modes* in Abb. 3 an den gleichen Frequenzen (siehe  $\Im\{\kappa_{10}\} \approx 49$  Hz und  $\Im\{\kappa_{35}\} \approx 192$  Hz) mit geringem Realteil, also schwach gedämpft, auftreten.

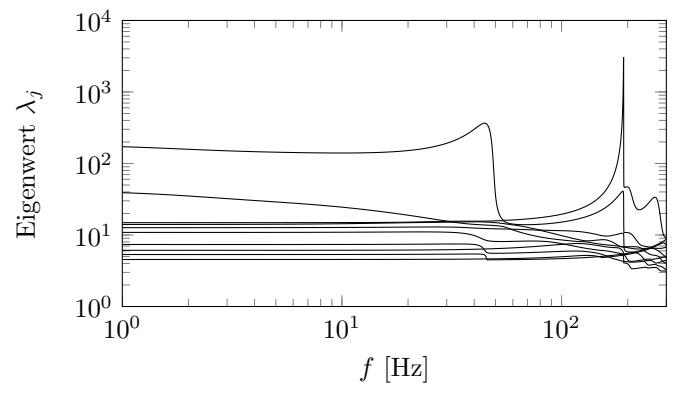


Abbildung 4: Frequenzabhängigkeit der zehn größten Eigenwerte  $\lambda_1 - \lambda_{10}$  der *radiation modes*.

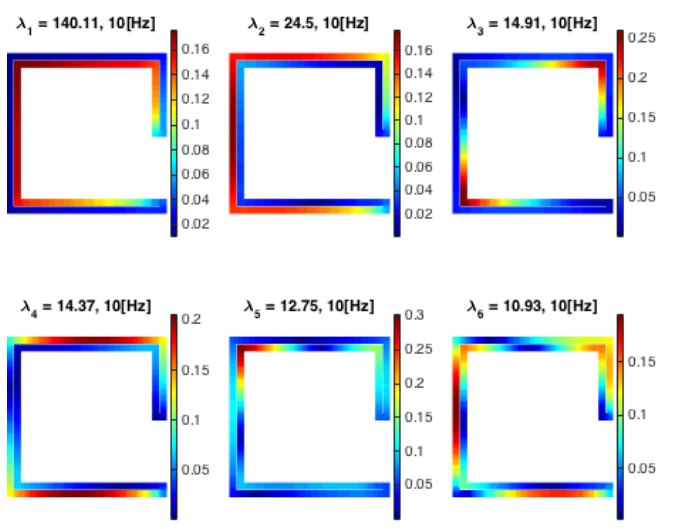


Abbildung 5: *Radiation* Modenformen der sechs größten Eigenwerte bei tiefen Frequenzen (hier 10 Hz).

**Schalleistung**

Für die Berechnung der abgestrahlten Schalleistung werden auf die Oberflächen der offenen Struktur (siehe Abb. 2) jeweils unterschiedliche, komplexe Oberflächenschnellen  $\mathbf{v}_s$  aufgeprägt. Die berechneten Schalleistungen auf Basis der *normal modes* aus Gl. (13) und der *radiation modes* aus Gl. (15) sind im Frequenzbereich von 1 Hz bis 300 Hz in Abb. 6 dargestellt. Als Referenz dient zum einen die Berechnung der Schalleistung über die Inversion der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{A}$  in Gl. (7) und weiterhin eine Berechnung mit COMSOL Multiphysics® unter der Verwendung von PML (Perfectly Matched Layer). Die auf Basis der *acoustic radiation modes* berechnete abgestrahlte Schalleistung ist der Referenzlösung mittels Inversion der dynamischen Steifigkeitsmatrix sehr ähnlich. Diese wiederum stimmt sehr gut mit der Berechnung mittels COMSOL und PML überein. Die Berechnung der Schalleistung mittels der *normal modes* liefert aufgrund einer unzureichenden Orthogonalität ein deutlich von der Referenzlösung abweichendes Ergebnis, was Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein wird.

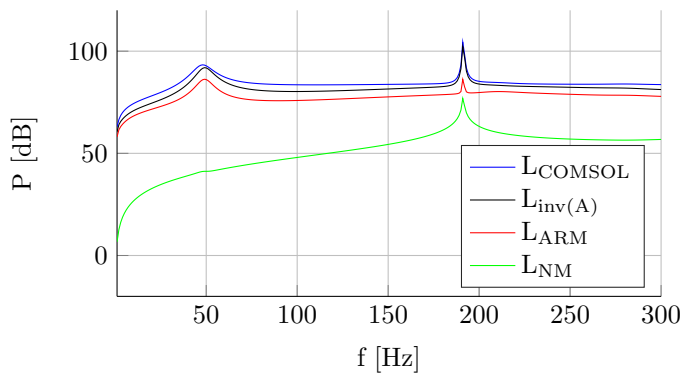


Abbildung 6: Abgestrahlte Schalleistung für definierte Schnellen auf der Oberfläche der Struktur.

## Zusammenfassung

Beide Arten von Moden für das Außenraumproblem liefern Informationen darüber, welche Schwingformen zu bestimmten Frequenzen schwach gedämpft auftreten und somit großen Einfluss auf die abgestrahlte Schalleistung nehmen. Um den Speicherbedarf zu minimieren, ließe sich mit diesem Wissen eine modale Reduktion auf jene einflussreichen Eigenwerte und -vektoren durchführen. Voraussetzung für verlässliche Ergebnisse bei der Berechnung der Eigenwerte der *normal modes* ist die Diagonalisierbarkeit der Zustandsraummatrizen mittels der modalen Matrizen. Hinsichtlich des Auftretens komplex konjugierter Eigenwerte, nicht vernachlässigbarer Nebendiagonaleinträge und damit einhergehender Ungenauigkeiten in der berechneten Schalleistung, steht für zukünftige Untersuchungen zunächst die Verbesserung der Orthogonalitätseigenschaften im Vordergrund. Hierfür sollen beispielsweise die Vernetzung im FE-Gebiet und die radialen Polynome der Interpolationsfunktionen für die infiniten Elemente variiert werden.

## Literatur

- [1] Borgiotti, G. V. The power radiated by a vibrating body in an acoustic fluid and its determination from boundary measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America* 88, 4 (1990): 1884–1893.
- [2] Sarkissian, A. Acoustic radiation from finite structures. *The Journal of the Acoustical Society of America* 90, 1 (1991): 574–578.
- [3] Cunefare, K. A. The minimum multimodal radiation efficiency of baffled finite beams. *The Journal of the Acoustical Society of America* 90, 5 (1991): 2521–2529.
- [4] Cunefare, K. A., and Currey, M. N. On the exterior acoustic radiation modes of structures. *The Journal of the Acoustical Society of America* 96, 4 (1994): 2302–2312.
- [5] Cunefare, K. A., Currey, M. N., Johnson, M. E., and Elliott, S. J. The radiation efficiency grouping of free-space acoustic radiation modes. *The Journal*

of the Acoustical Society of America 109, 1 (2001): 203–215.

- [6] Peters, H., Kessissoglou, N., and Marburg, S. Enforcing reciprocity in numerical analysis of acoustic radiation modes and sound power evaluation. *Journal of Computational Acoustics* 20, 03 (2012).
- [7] Marburg, S. Normal modes in external acoustics. part i: Investigation of the one-dimensional duct problem. *Acta acustica united with acustica* 91, 6 (2005): 1063–1078.
- [8] Marburg, S., Dienerowitz, F., Horst, T., and Schneider, S. Normal modes in external acoustics. part ii: Eigenvalues and eigenvectors in 2d. *Acta acustica united with acustica* 92, 1 (2006): 97–111.
- [9] Marburg, S. Normal modes in external acoustics. part iii: Sound power evaluation based on superposition of frequency-independent modes. *Acta acustica united with acustica* 92, 2 (2006): 296–311.
- [10] Astley, R. J., and Eversman, W. Finite element formulations for acoustical radiation. *Journal of Sound and Vibration* 88, 1 (1983): 47–64.
- [11] Marburg, S. A unified approach to finite and boundary element discretization in linear time-harmonic acoustics. In *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*, S. Marburg and B. Nolte, Eds. Springer Berlin Heidelberg: 2008: pp. 1–34.
- [12] Astley, R. J., Macaulay, G. J., Coyette, J. P., and Cremers, L. Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. part i. formulation in the frequency domain. *The Journal of the Acoustical Society of America* 103, 1 (1998).