

# Dämpfungsgrade und Eigenfrequenzverhalten offener Hohlräume

Stefanie Retka<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut für Technische Mechanik, TU Clausthal, 38678 CLZ, Deutschland, Email: stefanie.retka@tu-clausthal.de

## Einleitung

In einem mit Luft gefüllten geschlossenen Hohlkörper entspricht der erste Mode der Starrkörperbewegung. Eine kleine Öffnung im Körper führt zu einem sprunghaften Anstieg dieses Null-Modus. Der Anstieg hängt sowohl von der Größe der Öffnung als auch von der Wanddicke des Hohlkörpers ab. Der Einfluss dieser beiden veränderlichen Parameter auf die Eigenfrequenzen und das Dämpfungsverhalten wird präsentiert. Es werden je drei verschiedene Öffnungsradien und Wanddicken miteinander kombiniert, woraus sich neun verschiedene Modelle ergeben. Die jeweils erste Eigenfrequenz wird mit der analytischen Lösung des Helmholtzresonators verglichen. Anschließend wird der Dämpfungsgrad der jeweils ersten drei Moden auf zwei verschiedene Varianten ermittelt, über die Modalanalyse und über die Halbwertsbreite.

## Modellaufbau

Für das Modell des Hohlkörpers wird ein dreidimensionaler Körper ohne Symmetrieeigenschaften gewählt, um doppelte Eigenfrequenzen zu vermeiden. Bei dem Körper handelt es sich um einen schiefen Pyramidenstumpf. An einer Seite des Körpers befindet sich eine kleine kreisförmige Öffnung, siehe Abbildung 1.

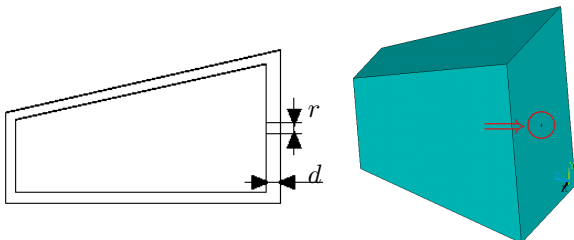


Abbildung 1: Hohlkörper mit Loch, Skizze (links) und Modell (rechts).

Sowohl der Radius der Öffnung  $r$  als auch die Wanddicke des Körpers  $d$  werden variiert.

## FE Formulierung und Diskretisierung

Das hier betrachtete Randwertproblem setzt sich aus der Helmholtz-Gleichung (1), der Neumann-Randbedingung (2) am Innenrand sowie der Sommerfeld-Abstrahlbedingung (3) zur Berücksichtigung der Abstrahlung in den Außenraum zusammen.

$$-\Delta p(\mathbf{x}) - k^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{g} \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2)$$

$$R \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial R} - ikp(\mathbf{x}) \right\} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (3)$$

Über die Neumann-Randbedingung wird die der Öffnung gegenüberliegende Seite zu Schwingungen angeregt, während alle verbleibenden Wände als schallhart angesehen werden. Die Sommerfeld-Bedingung garantiert, dass nur nach außen propagierende Wellen im Fernfeld des Körpers existieren [1]. Diese Formulierung führt auf ein quadratisches Eigenwertproblem mit Massen- ( $\mathbf{M}$ ), Dämpfungs- ( $\mathbf{D}$ ) und Steifigkeitsmatrix ( $\mathbf{K}$ ) und kann geschrieben werden als

$$(\mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{b}. \quad (4)$$

Dabei enthalten die Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{b}$  den Druck in den einzelnen Knoten bzw. die Randbedingungen,  $i$  ist die imaginäre Zahl und  $k$  die Wellenzahl.

Der Innenraum und das Nahfeld des Körpers werden mit finiten Elementen vernetzt. Hierzu werden Lagrange-Tetraeder-Elemente zweiter Ordnung verwendet. An die finiten Elemente werden infinite Elemente zur Abbildung des Fernfeldes angeschlossen. Als infinite Elemente werden komplex-konjugierte Astley-Leis Elemente gewählt [2, 3]. In Abbildung 2 sind die verwendeten Elemente dargestellt.

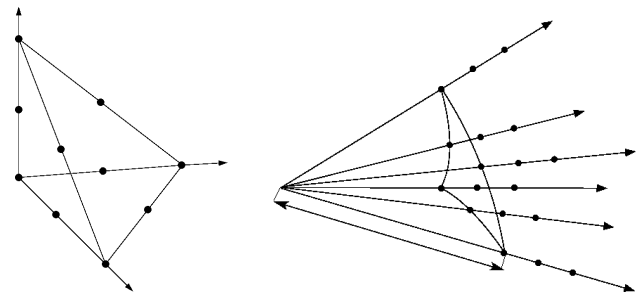


Abbildung 2: Finites Element (links) und infinites Element (rechts).

Abbildung 3 zeigt das mit finiten Elementen vernetzte Modell. Der Hohlkörper selbst stellt dabei den Außenraum dar, während die Luft im Inneren und im Nahfeld um den Körper mit finiten Elementen abgebildet wird.

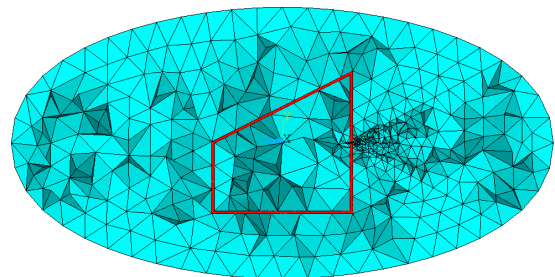
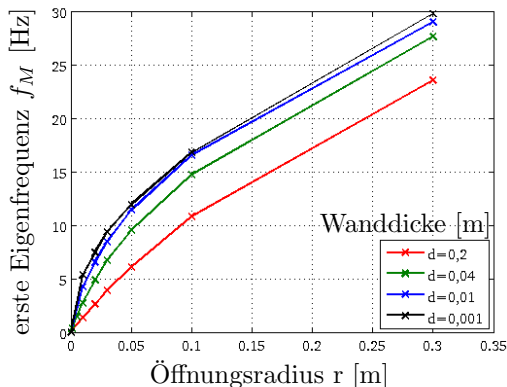


Abbildung 3: FE Modell.

## Ergebnisse

Im ersten Teil der Untersuchungen wird der Einfluss der Wanddicke und des Öffnungsradius auf die erste Eigenfrequenz untersucht. Abbildung 4 zeigt den Frequenzverlauf. Während bei einem geschlossenem Hohlkörper



**Abbildung 4:** Anstieg der Eigenfrequenz in Abhängigkeit von  $r$  und  $d$ .

die erste Eigenfrequenz der Starrkörperbewegung,  $f_M = 0 \text{ Hz}$ , entspricht, steigt diese Eigenfrequenz bereits bei einem sehr geringen Öffnungsradius sprunghaft an. Je größer der Radius wird, desto geringer wird der Anstieg der Kurve. Die Untersuchung von vier verschiedenen Wanddicken zeigt, dass die Eigenfrequenz größer wird, je dünner die Wand ist.

Zusätzlich zur numerischen Modalanalyse wird die Eigenfrequenz des Helmholtz-Resonators analytisch ermittelt

$$f_R = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S_0}{V_0(L + 2\Delta L)}}, \quad (5)$$

mit  $c$  als Schallgeschwindigkeit,  $S_0$  als Querschnitt des Resonatorhalses,  $V_0$  als eingeschlossenes Volumen,  $L$  als Länge des Resonatorhalses und  $\Delta L$  als Mündungskorrektur. In Tabelle 1 sind einzelne Eigenfrequenzen, einerseits ermittelt über die numerische Modalanalyse ( $f_M$ ) und andererseits ermittelt über die Helmholtz-Resonatorberechnung ( $f_R$ ) gegenübergestellt. Aus der Tabelle kann entnommen werden, dass eine gute

**Tabelle 1:** Vergleich der Eigenfrequenzen aus Modalanalyse und Resonatorberechnung.

$r =$	$d = 0,2$		$d = 0,01$		$d = 0,001$	
	$f_M$	$f_R$	$f_M$	$f_R$	$f_M$	$f_R$
0,01	1,36	1,35	4,22	3,92	5,32	4,86
	82,24	-	82,34	-	82,40	-
0,05	6,07	5,95	11,40	10,55	11,93	11,13
	82,44	-	83,02	-	83,10	-
0,3	23,52	22,99	28,99	27,15	29,77	27,41
	85,61	-	88,40	-	88,84	-

Übereinstimmung bei kleinem Öffnungsradius und großer Wanddicke erreicht werden kann, während die Eigenfrequenzen bei steigendem Öffnungsradius und sinkender Wandstärke immer stärker voneinander abweichen. Es

wird vermutet, dass die Übereinstimmung zur analytischen Lösung davon abhängt, wie nah das gewählte Modell an das Modell eines Helmholtz-Resonators herankommt. Je dicker die Wand und je kleiner die Öffnung, desto deutlicher wird die Form des Helmholtz-Resonators erreicht.

Zusätzlich sind in Tabelle 1 die jeweils zweite Eigenfrequenz der numerischen Lösung dargestellt. Hierbei ist ersichtlich, dass der Einfluss von Wandstärke und Öffnungsradius wesentlich geringer ist. Weiterführende Untersuchungen haben gezeigt, dass deren Einfluss bei höheren Eigenfrequenzen weiter abnimmt.

Tabelle 2 zeigt die Dämpfungseigenschaften bei kleinster und größter Wanddicke für drei verschiedene Öffnungsradien. Dargestellt sind jeweils die Abklingkonstanten der ersten drei Eigenfrequenzen.

**Tabelle 2:** Dämpfungseigenschaften bei kleinster und größter Wanddicke,  $\delta$ .

$r =$	$d = 0,2$	$d = 0,001$
0,05	0,0007	0,0082
	0,0023	0,0267
	4,9e-5	0,0005
0,3	0,1077	0,2355
	0,7146	1,5202
	0,0132	0,0495

Anhand der Tabelle ist erkennbar, dass die Abklingkonstante bei größer werdendem Radius ansteigt. Weiterhin ist der Einfluss der Dämpfung bei einer dünneren Wand stärker ausgeprägt.

In einem letzten Schritt wird der Dämpfungsgrad über zwei verschiedene Varianten ermittelt und anschließend verglichen. Einerseits lässt sich der Dämpfungsgrad aus der Modalanalyse

$$D_M = \frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f_M \quad (6)$$

und andererseits aus der Halbwertsbreite

$$D_H = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} \quad (7)$$

bestimmen. Die Halbwertsbreite wird aus der Resonanzkurve [4] ermittelt, Abbildung 5.

Tabelle 3 stellt diese Ergebnisse gegenüber. Diese Tabelle

**Tabelle 3:** Dämpfungsgrad aus Modalanalyse ( $D_M$ ) und Halbwertsbreite ( $D_H$ ).

$r =$	$d = 0,2$		$d = 0,001$	
	$D_M$	$D_H$	$D_M$	$D_H$
0,05	1,1e-4	1,4e-5	7,2e-4	1,2e-3
	2,8e-5	3,2e-5	3,4e-4	3,6e-4
	4,2e-7	3,2e-7	5,0e-6	3,8e-6
0,3	4,7e-3	7,8e-3	7,9e-3	8,9e-3
	8,6e-3	1,0e-2	1,7e-2	1,9e-2
	1,3e-4	1,0e-4	4,6e-4	4,6e-4

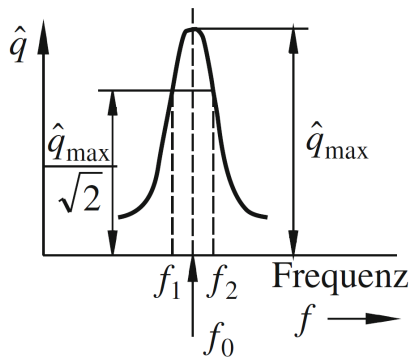


Abbildung 5: Berechnung der Halbwertsbreite nach [4].

zeigt jedoch eine schlechte Übereinstimmung beider Berechnungsvarianten bei kleinem Öffnungsradius. Bei dünner Wand und großem Öffnungsradius wird eine bessere Übereinstimmung erzielt, diese ist jedoch noch nicht für alle Frequenzen zufriedenstellend.

## Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel wird die Lösung des quadratischen, komplexen und unsymmetrischen Eigenwertproblems sowie der Schalleistung im Außenraum mit dem Schwerpunkt auf die Betrachtung der Eigenfrequenzen und des Dämpfungsverhaltens präsentiert. Hierzu wird ein Hohlkörper mit Loch als Modell verwendet, bei welchem sowohl die Wanddicke als auch der Öffnungsradius des Lochs variiert werden.

Dabei wurde der erwartete, steile Anstieg der Eigenfrequenzen bei Existenz einer Öffnung im Vergleich zum geschlossenen Körper nachgewiesen. Eine geringere Wanddicke führt dabei zu einer größeren Eigenfrequenz. Die Näherungslösung des Helmholtz-Resonators für die analytische Berechnung der ersten Eigenfrequenz ist dabei in erster Linie bei geringem Öffnungsradius und großer Wandstärke anwendbar. Grund hierfür ist die starke Ähnlichkeit des Modells zum Helmholtz-Resonator. Vergrößert sich die Öffnung und verringert sich die Wanddicke, weichen numerische und analytische Lösung deutlich voneinander ab. Auch der Anstieg der Dämpfung bei geringerer Wanddicke und steigendem Öffnungsradius wurde nachgewiesen.

Lediglich die Berechnung des Dämpfungsgrades über Modalanalyse und Halbwertsbreite führte zu keinen zufriedenstellenden Ergebnissen. Der Dämpfungsgrad aus der Halbwertsbreite weicht in vielen Fällen deutlich von den Ergebnissen aus der Modalanalyse ab. Daher sind weiterführende Untersuchungen in diesem Bereich erforderlich.

Der Dämpfungsgrad eines Modes wird bei einem gekoppelten System durch die anderen Moden beeinflusst. Im Gegensatz zur Berechnung über die Halbwertsbreite wird dieser Effekt bei der Berechnung des Dämpfungsgrads über die Modalanalyse berücksichtigt. Zur Entkopplung des Systems können mithilfe der modalen Superposition die modalen Parameter ermittelt werden. Dies hat je-

doch keinen Einfluss auf die Eigenfrequenzen und somit auch nicht auf die Dämpfungsgrade. Sie bleiben unverändert. Dieses Ergebnis ist nachvollziehbar, da es sich trotz modaler Superposition um die Moden des Gesamtsystems handelt.

Andererseits ist denkbar, dass die Dämpfungsgrade unterschiedlich sind, da der Wert des Peaks in der Frequenz bei der Berechnung der Halbwertsbreite nicht exakt mit der Eigenfrequenz aus der Modalanalyse übereinstimmt.

## Literatur

- [1] S. Fuß (Retka), S. C. Hawkins und S. Marburg: An eigenvalue search algorithm for the modal analysis of a resonator in free space. *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 19(1), S. 95–109 (2011)
- [2] R. J. Astley: Infinite elements for wave problems: A review of current formulations and an assessment of accuracy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 49, S. 951–976 (2000)
- [3] D. S. Burnett und R. L. Holford: An ellipsoidal acoustic infinite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, S. 49–76 (1998)
- [4] H. Dresig und F. Holzweißig: *Maschinendynamik*, 11. Auflage, Springer Vieweg (2012)