

# Statistische Energie Analyse: Ein Verfahren zur schnellen Prognose der Nachhallzeit in Räumen mit nicht-diffusem Schallfeld

Felix Pfreundtner<sup>1</sup>, Eckard Mommertz<sup>2</sup>, Bernhard Seeber<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Audio Information Processing, Technische Universität München, 80333 München,  
E-Mail: felix.pfreundtner@tum.de, seeber@tum.de

<sup>2</sup> Müller-BBM GmbH, 82152 Planegg, E-Mail: eckard.mommertz@mbbm.com

## Einleitung

In der raumakustischen Planungspraxis ist es hilfreich, bereits zu einem frühen Planungszeitpunkt und ohne aufwendige Computersimulation, Aussagen über den zeitlichen Abfall des Nachhalls im nicht-diffusen Schallfeld zu treffen. In Räumen mit quaderförmiger Grundstruktur kann hierfür auf das Prinzip der Statistischen Energie Analyse (SEA) zurückgegriffen werden. Entsprechende Vorgehensweisen zur Bestimmung des Abfalls der Schallenergiegedichte im Raum wurden von Nilsson [1] und Wilmshurst & Thompson [2] vorgeschlagen. Obwohl ersteres Verfahren in der europäisch harmonisierten Norm EN 12354-6 Annex D [3][4] aufgegriffen wurde, hat es sich in der Anwendung noch nicht bewährt. Im Folgenden soll ein neuer SEA Modellierungsansatz zur Prognose der Nachhallzeit vorgestellt werden. Die Nachhallzeitprognosen des neuen Prognoseverfahrens werden mit den Prognosen der zwei bestehenden SEA Verfahren und mit einem hybriden Spiegelquellenalgorithmus verglichen.

## Grundprinzip SEA Modellierung

Bei einem Statistischen Energie Analyse Modell zur Prognose der Nachhallzeit handelt es sich um ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung, das den zeitlichen Abfall der Schallenergiegedichte  $E_i^*(t) = \frac{E_i(t)}{E_i(0)}$  der Raumresonanzen (Moden) für hohe Frequenzen bestimmt. Über Summation der Schallenergiegedichten aller Raumresonanzen ermittelt sich der Abfall der Schallenergiegedichte  $E_{Raum}^*(t) = \frac{E(t)}{E(0)} = \sum_i E_i^*(t)$  im Raum, wobei die Nachhallzeit  $T60$  dem Zeitpunkt  $t$  entspricht bei dem die Schallenergiegedichte um den Faktor  $\frac{E(t)}{E(0)} = \frac{1}{1000000}$  abgefallen ist. Da eine analytische Bestimmung der Raumresonanzen aus der Helmholtz Gleichung ausschließlich für Quaderäume möglich ist, eignen sich SEA Modelle zur Nachhallzeitprognose nur in rechteckförmigen Räumen (Abb. 1).

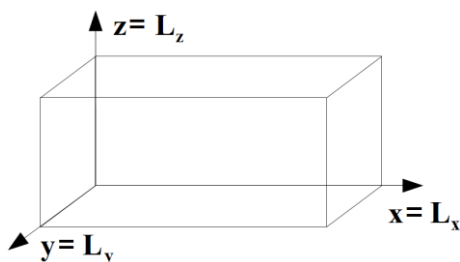


Abb. 1: Quaderraum Koordinaten.

In Räumen mit gleichmäßiger Absorptionsverteilung (diffuses Schallfeld) erfahren dabei im zeitlichen Mittel alle Moden pro Sekunde eine identische Abnahme der Schallenergiegedichte durch Absorption von Schallenergie an den Wänden, modelliert durch einen, für alle Moden identischen, Dämpfungsfaktor  $\eta_i$ . In Räumen mit ungleichmäßiger Absorptionsverteilung (nicht-diffuses Schallfeld) hingegen erfährt jede Mode eine abweichende Absorption pro Sekunde, weist somit einen individuellen Dämpfungsfaktor  $\eta_i$  auf. Auch muss in Räumen mit nicht-diffusem Schallfeld die Wandstreuung modelliert werden, was in SEA Modellen durch Koppelfaktoren  $\eta_{ij}$  berücksichtigt wird. Diese beschreiben welcher Anteil der Schallenergiegedichte der Mode  $i$  im Mittel pro s in Mode  $j$  übergeht. Um die Anzahl an Dämpfungs- und Koppelfaktoren zu begrenzen, werden bei der Statistischen Energie Analyse Raumresonanzen mit ähnlichen Dämpfungs- und Koppelfaktoren zu einem Subsystem (Modengruppe) zusammengefasst.

Zum Aufstellen des Differentialgleichungssystems müssen für jedes Subsystem  $i$  ein Dämpfungsfaktor  $\eta_i$  und die Koppelfaktoren  $\eta_{ij}$  in alle anderen Subsysteme bestimmt werden. Des Weiteren muss für jedes Subsystem die Anfangsbedingung des Differentialgleichungssystems  $E_i^*(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  (Ausschalten der Schallquelle) bestimmt werden. Dies entspricht dem relativen Anteil der stationären Schallenergiegedichte der Moden des Subsystems  $i$  an der gesamten stationären Schallenergiegedichte aller Moden.

## Grundprinzip neuer SEA Modellierungsansatz

Der neue Modellierungsansatz nimmt identisch dem SEA Modellierungsansatz von Wilmshurst & Thompson [2] eine Aufteilung in sieben Subsysteme vor, siehe Tab. 1.

Tab. 1: Subsysteme neuer SEA Modellierungsansatz

$i$	Subsystem	Reflektierte Wände $w$ (Teilchenvorstellung)
1	x-axiale Moden	$x=0, x=L_x$
2	y-axiale Moden	$y=0, y=L_y$
3	z-axiale Moden	$z=0, z=L_z$
4	xy-tangentiale Moden	$x=0, x=L_x, y=0, y=L_y$
5	xz-tangentiale Moden	$x=0, x=L_x, z=0, z=L_z$
6	yz-tangentiale Moden	$y=0, y=L_y, z=0, z=L_z$
7	oblique Moden	$x=0, x=L_x, y=0, y=L_y, z=0, z=L_z$

Den Abfall der Schallenergiedichte in den sieben Subsystemen erhält man durch (numerisches) Lösen des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\frac{d}{dt} E^*(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{K}) \cdot E^*(t) = 0 \text{ mit } E^*(t) = \begin{pmatrix} E_1^*(t) \\ \vdots \\ E_7^*(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sum_{j \neq 1}^7 \eta_{1j} & -\eta_{21} & \cdots & -\eta_{71} \\ -\eta_{12} & \sum_{j \neq 2}^7 \eta_{2j} & \cdots & -\eta_{72} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{17} & -\eta_{27} & \cdots & \sum_{j \neq 7}^7 \eta_{7j} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Den Abfall der Schallenergiedichte im Raum in Dezibel unter Berücksichtigung der Luftdämpfung erhält man zu:

$$E_{Raum}^*(t) = 10 \cdot \log(\sum_{i=1}^7 E_i^*(t) e^{-mct}),$$

mit  $m$ : Dämpfungskonstante der Luft. (2)

Die Anfangsbedingung des Differentialgleichungssystem  $E_i^*(0)$  für jedes Subsystem  $i$  erhält man identisch Wilmshurst & Thompson [2] zu:

$$E^*(0) = \begin{pmatrix} E_1^*(0) \\ \vdots \\ E_7^*(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^7 N_i(f) \cdot k_i} \begin{pmatrix} N_1(f) \cdot k_1 \\ \vdots \\ N_7(f) \cdot k_7 \end{pmatrix}$$

$i \in 1,2,3: k_i = 4; i \in 4,5,6: k_i = 2; i \in 7: k_i = 1$  (3)

$N_i(f)$  entspricht der Anzahl an Moden in Subsystem  $i$  in einem Frequenzband mit Grenzfrequenz  $f_o$  und  $f_u$  [5]:

$$N_{1,2,3}(f) = \frac{2}{c} L_{x,y,z} (f_o - f_u)$$

$$N_{4,5,6}(f) = \frac{\pi}{c^2} L_{x,x,y} L_{y,z,z} (f_o^2 - f_u^2) - \frac{1}{c} (L_{x,x,y} + L_{y,z,z}) (f_o - f_u)$$

$$N_7(f) = \frac{4\pi V}{3c^3} (f_o^3 - f_u^3) - \frac{\pi S}{4c^2} (f_o^2 - f_u^2) + \frac{U}{8c} (f_o - f_u)$$

Quader:  $V$  = Volumen,  $S$  = Oberfläche,  $U$  = Kantenumfang. (4)

Der Faktor  $k_i$  berücksichtigt, dass im stationären Schallfeld bei normiertem Schalldruck die Schallenergiedichte einer axialen Mode viermal höher ist als die einer obliquen Mode und die Schallenergiedichte einer tangentialen Mode zweimal höher ist als die einer obliquen Mode [5].

### Modellierung Dämpfungsfaktoren (Absorption)

Um die Dämpfungs- und Koppelfaktoren für alle Subsysteme zu bestimmen, wird jede Mode vereinfacht als ein Teilchen modelliert (siehe Abb. 2).

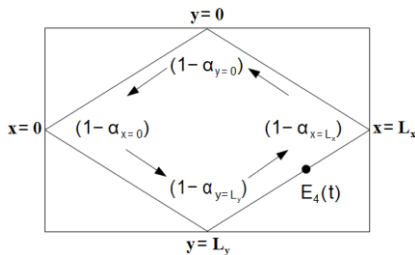


Abb. 2: Teilchenvorstellung xy-tangentiale Mode.

Ein Teilchen des Subsystem  $i$  breitet sich dabei im Raum mit der Ausbreitungsrichtung der Wellenfront der zugehörigen Mode mit Schallgeschwindigkeit  $c$  aus und reflektiert ausschließlich an den in Tab. 1 gegebenen Wänden. Die Reflexion eines Teilchens im Subsystem  $i$  erfolgt dabei im Mittel nach der mittleren freien Weglänge  $\bar{l}_i$ :

$$\Delta t_i = \frac{\bar{l}_i}{c} \quad (5)$$

Die mittlere freie Weglänge  $\bar{l}_{1,2,3}$  der axialen ( $x, y, z$ ) Teilchen entspricht den Raumdimensionen ( $L_x, L_y, L_z$ ). Die mittlere freie Weglänge der tangentialen ( $xy, xz, yz$ ) Teilchen ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge des in der ( $xy, xz, yz$ ) Ebene geschnitten Quaders:

$$\bar{l}_{4,5,6} = \frac{\pi S_{xy,xz,yz}}{U_{xy,xz,yz}},$$

mit  $S$  = Oberfläche Ebene,  $U$  = Umfang Ebene. (6)

Die mittlere freie Weglänge der obliquen Teilchen entspricht der mittleren freien Weglänge eines Quaders:

$$\bar{l}_7 = \frac{4V}{S},$$

mit  $V$  = Volumen Quader,  $S$  = Oberfläche Quader. (7)

Die Schallenergiedichte aller Teilchen des Subsystems  $i$  wird dabei im Mittel um den mittleren allseitigen Absorptionsgrad  $\bar{\alpha}_i$ , aller Wände  $w$  an denen die Teilchen des Subsystems  $i$  reflektiert werden (vgl. Tab. 1), gedämpft.

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\sum_w S_{i,w} \alpha_{i,w}}{S_i}, \text{ mit } S_i = \sum_w S_{i,w} \quad (8)$$

Nach  $n$  Reflexionen ergibt sich der Abfall der Schallenergiedichte des Subsystem  $i$  zu:

$$E_i^*(t) = E_i^*(0) \cdot (1 - \bar{\alpha}_i)^n$$

$$E_i^*(t) = E_i^*(0) \cdot e^{\ln(1 - \bar{\alpha}_i) \frac{c}{\bar{l}_i} t} \quad (9)$$

Der Dämpfungsfaktor des Subsystems  $i$  lässt sich daraus ableiten zu:

$$E_i^*(t) = E_i^*(0) \cdot e^{-\eta_i t}$$

$$\eta_i = -\frac{c}{\bar{l}_i} \ln(1 - \bar{\alpha}_i) \quad (10)$$

### Modellierung Koppelfaktoren (Streuung)

Die 49 Koppelfaktoren  $\eta_{ij}$  beschreiben, welcher Anteil der Schallenergiedichte des Subsystem  $i$  im Mittel pro  $s$  in Subsystem  $j$  übergeht. Eine Reflexion im Subsystem  $i$  findet im Mittel nach der Zeitdauer  $\Delta t_i$  statt. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Teilchen des Subsystems  $i$  eine Reflexion an Wand  $w$  erfolgt, kann über das Verhältnis der Oberfläche  $S_w$  der Wand  $w$  zur Oberfläche aller Wände  $S_i = \sum_w S_{i,w}$ , an denen Teilchen des Subsystems  $i$  reflektieren (vgl. Tab. 1), ermittelt werden. Der Anteil der diffus reflektierten Schallenergie an der gesamt reflektierten Energie ist über den allseitigen Streugrad  $s_w$  der Wand  $w$  gegeben.

Bei einer Reflexion eines Teilchens im Subsystem  $i$  wird somit im Mittel pro  $s$  die Schallenergiedichte  $E_{i,w,diffus}^*(t)$  an der Wand  $w$  diffus reflektiert:

$$E_{i,w,diffus}^*(t) = E_i^*(t) \cdot \frac{c}{l_i} \cdot \frac{S_w}{S_i} \cdot s_w \quad (11)$$

Die diffus reflektierte Schallenergiedichte des Subsystems  $i$  muss nun neu verteilt werden, wobei über den Faktor  $h_{ij,w}$  angegeben wird, welcher Anteil der in Subsystem  $i$  pro Sekunde an Wand  $w$  diffus reflektierten Schallenergiedichte in Subsystem  $j$  übergeht.

$$E_{ij,w,diffus}^*(t) = E_{i,w,diffus}^*(t) \cdot h_{ij,w}$$

$$\sum_{j=1}^7 h_{ij,w} = 1 \quad (12)$$

Im Folgenden wird ein Vorschlag gemacht, wie für jedes Subsystem  $i$  für jede Wand  $w$  die Faktoren  $h_{ij,w}$  bestimmt werden können. Entsprechend obiger Annahmen besitzt jedes Teilchen eine Ausbreitungsrichtung, welche der Wellenfront der zugehörigen Mode entspricht. Folglich repräsentiert ein Subsystem  $i$  eine begrenzte Menge an Ausbreitungsrichtungen, welche der Anzahl an Moden  $N_i(f)$  im Subsystem  $i$  entspricht. Die Streuung eines Teilchens wird nun als Änderung der Ausbreitungsrichtung des Teilchens interpretiert. Es wird dabei angenommen, dass die Streuung eines Teilchens lediglich in eine Ausbreitungsrichtung erfolgen kann, welche einer Ausbreitungsrichtung einer beliebigen anderen Mode entspricht. Die Streuung erfolgt uniform, also mit gleicher Wahrscheinlichkeit in alle möglichen Ausbreitungsrichtungen. Besitzt ein Subsystem eine hohe Anzahl an Moden, erlaubt also viele mögliche Ausbreitungsrichtungen, dann ist, unter den gemachten Annahmen, die Wahrscheinlichkeit einer Streuung in eine Ausbreitungsrichtung dieses Subsystems höher als in eine Ausbreitungsrichtung eines Subsystems, welches weniger Ausbreitungsrichtungen erlaubt. Die Matrix  $H_w$  beschreibt diesen Zusammenhang, also mit welcher Wahrscheinlichkeit, im Fall einer Streuung an Wand  $w$ , ein Teilchen des Subsystem  $i$  in Subsystem  $j$  übergeht. Geometrisch ausgeschlossen werden müssen bei einer Streuung an Wand  $w$  neue Ausbreitungsrichtungen parallel zur Wand  $w$ , was über die Faktoren  $g_{ij,w} = 0$  berücksichtigt ist:

$$H_w = \begin{pmatrix} h_{11,w} & \dots & h_{71,w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{17,w} & \dots & h_{77,w} \end{pmatrix}$$

$$H_w = \begin{pmatrix} g_{11,w} & \dots & g_{71,w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{17,w} & \dots & g_{77,w} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{N_1(f)}{N_w(f)} & \dots & \frac{N_1(f)}{N_w(f)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_7(f)}{N_w(f)} & \dots & \frac{N_7(f)}{N_w(f)} \end{pmatrix}$$

Operator  $*$ : elementweise Matrizenmultiplikation.

Wand  $x=0$  oder Wand  $x=L_x$ :

$$i \in 2,3,6 \quad g_{ij,w} = 0; \quad j \in 2,3,6 \quad g_{ij,w} = 0; \quad \text{sonst } g_{ij,w} = 1$$

$$N_{w=1,w=2}(f) = \sum_{i \neq 2,3,6} N_i(f)$$

Wand  $y=0$  oder Wand  $y=L_y$ :

$$i \in 1,3,5 \quad g_{ij,w} = 0; \quad j \in 1,3,5 \quad g_{ij,w} = 0; \quad \text{sonst } g_{ij,w} = 1$$

$$N_{w=3,w=4}(f) = \sum_{i \neq 1,3,5} N_i(f)$$

Wand  $z=0$  oder Wand  $z=L_z$ :

$$i \in 1,2,4 \quad g_{ij,w} = 0; \quad j \in 1,2,4 \quad g_{ij,w} = 0; \quad \text{sonst } g_{ij,w} = 1$$

$$N_{w=5,w=6}(f) = \sum_{i \neq 1,2,4} N_i(f) \quad (13)$$

Die 49 Koppelfaktoren  $\eta_{ij}$  erhält man im Anschluss über:

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{71} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{17} & \dots & \eta_{77} \end{pmatrix}$$

$$K_{ij} = \sum_{w=1}^6 H_w * F \cdot S_w \cdot s_w, \quad \text{mit } F = \begin{pmatrix} \frac{c}{l_1 S_1} & \dots & \frac{c}{l_7 S_7} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c}{l_1 S_1} & \dots & \frac{c}{l_7 S_7} \end{pmatrix} \quad (14)$$

### Vergleich Prognoseergebnisse SEA Modelle

Um die Genauigkeit des neuen SEA Modellierungsansatzes für unterschiedliche Räume bewerten zu können, wurde die Nachhallzeitprognose mit der des CATT Hybriden Spiegelquellenalgorithmus verglichen. Ebenso wurde mit den Prognosen des EN-12354 Annex D SEA Modells [3] und des Wilmshurst & Thompson SEA Modell [2] und der Sabineschen Formel verglichen.

Im ersten Schritt erfolgten Nachhallzeitprognosen für fünf Quaderraumvarianten, welche eine geringe Streuung, unterschiedliche Absorptionsverteilungen und zwei unterschiedliche Raumdimensionen aufweisen (Abb. 3).

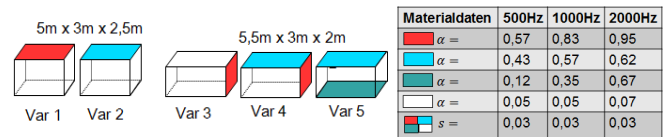


Abb. 3: Quaderraumvarianten Form und Material.

Die Nachhallzeitprognosen für die Oktavbänder an 500, 1000 und 2000 Hz sind in Abb. 4, 5 und 6 gegeben.

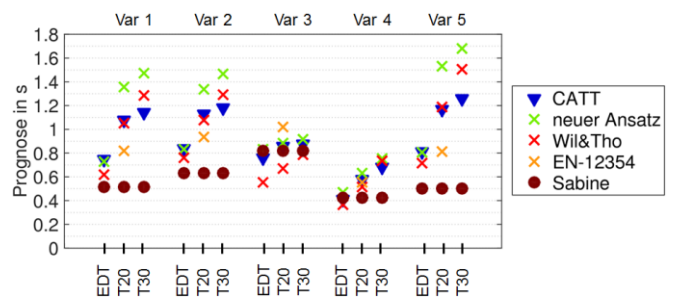


Abb. 4: Quaderraumvarianten Prognose Nachhallzeit 500 Hz.

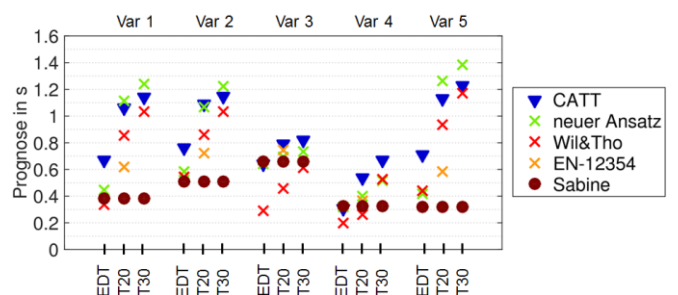


Abb. 5: Quaderraumvarianten Prognose Nachhallzeit 1000 Hz.

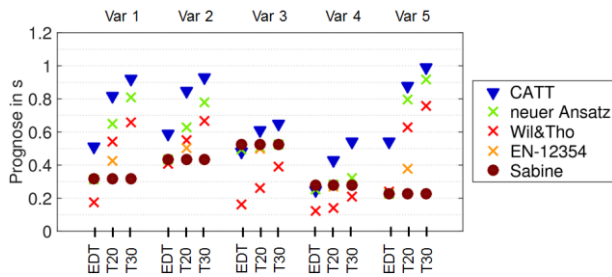


Abb. 6: Quaderraumvarianten Prognose Nachhallzeit 2000 Hz.

Die Nachhallzeitprognose EDT, T20 und T30 mit dem neuen SEA Modellierungsansatz wich im Median über alle Frequenzbänder und Varianten weniger als die anderen SEA Modelle von der CATT Nachhallzeitprognose ab (Abb. 7). Jedoch wurden von allen SEA Modellen auch vereinzelt größere Abweichungen prognostiziert.

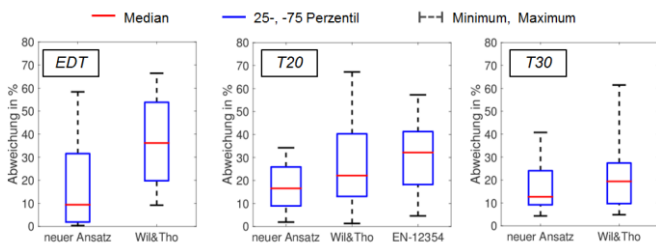


Abb. 7: Abweichung Prognose CATT – SEA Modelle.

Im zweiten Schritt erfolgten Nachhallzeitprognosen für das 1000 Hz Oktavband für sieben Varianten einer häufig zu planenden Unterrichtsraumform (9,5m x 7m x 2,5m) (Abb. 8):

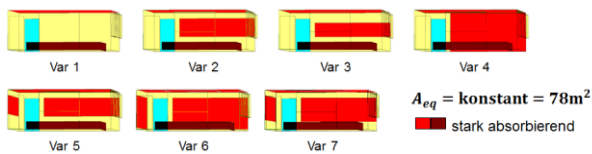


Abb. 8: Unterrichtsraumvarianten Form und Material.

Alle Varianten besitzen dabei eine äquivalente Absorptionsfläche von 78m<sup>2</sup>. Mit zunehmender Variantenummer wurde die Absorption, von der Decke ausgehend, gleichmäßiger im Raum verteilt, was zu einem diffuserem Schallfeld und einer kürzer werdenden Nachhallzeitprognose führen sollte. Die Streugrade der Wandflächen wurden realitätsnah angesetzt. Da SEA Modelle ausschließlich einen Absorptions- und Streugrad pro Wandfläche modellieren können, wurden alle Absorptions- und Streugrade einer Wandfläche gemittelt und anschließend die Nachhallzeit mit allen Prognoseverfahren für die vereinfachten Unterrichtsraumvarianten prognostiziert. Abb. 9 zeigt die prognostizierten Nachhallzeiten T20. Die Prognoseergebnisse der einzelnen Varianten wurden verbunden, um den zu erwartenden Trend der mit Variantenummer stetig kürzer werdenden Nachhallzeiten erkennen zu können. Der neue SEA Modellierungsansatz und das EN-12354 Modell weisen mit CATT vergleichbare, mit Variantenummer stetig kürzer werdende, Nachhallzeitprognosen T20 auf. Das Wilmshurst & Thompson SEA Modell prognostizierte insbesondere für die Unterrichtsraumvariante 4 eine zu kurze Nachhallzeit T20.

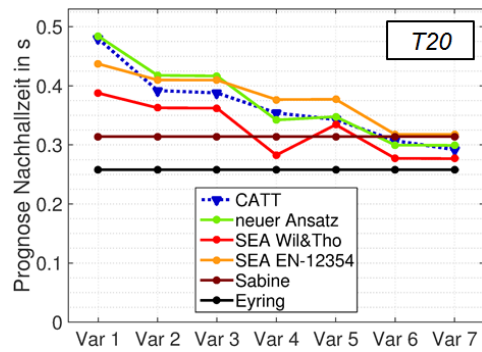


Abb. 9: Unterrichtsraumvarianten Prognose Nachhallzeit T20.

## Fazit

Im vorliegenden Beitrag wurde ein neuer SEA Modellierungsansatz zur Prognose der Nachhallzeit in Quaderräumen vorgestellt. Die Prognose erfolgt dabei in wenigen Sekunden. Es zeigte sich, dass das Verfahren im Median nur geringfügig andere Prognoseergebnisse als eine Computersimulation erzielt. So betragen die Prognoseunterschiede der Nachhallzeit T20 zwischen Simulation und dem neuem SEA Modellierungsansatz für untersuchte stark nicht-diffuse Quaderraumvarianten im Median 16%, für diffusere Unterrichtsraumvarianten im Median 3%. Zwar zeigten das SEA Modell der EN-12354-6 Norm und das SEA Modell von Wilmshurst & Thompson etwas höhere Abweichungen zur CATT Nachhallzeitprognose, jedoch ist auch mit diesen Verfahren eine hohe Prognosegenauigkeit gewährleistet. Ein Einsatz von SEA Modellen ist insbesondere in der raumakustischen Planungsphase für Räume mit Quaderform hilfreich, in denen ein nicht-diffuses Schallfeld erwartet werden muss, der zeitliche Mehraufwand einer Computermodellerstellung mit anschließender Simulation jedoch nicht gegeben ist (Beispiel: Unterrichtsraum, Turnhalle). Hier empfiehlt es sich, anstelle der Sabine'schen Prognoseformel, das vorgeschlagene SEA Modell zur Prognose der Nachhallzeit einzusetzen.

## Literatur

- [1] Nilsson, E.: Decay processes in rooms with non-diffuse sound fields. Dissertation report TVBA-1004. Lund Institute of Technology, Department of Engineering Acoustics, Lund, 1992.
- [2] Wilmshurst, L. & Thompson, D.: A method for predicting the reverberation time and decay curves of rectangular rooms with non-uniform absorption distribution using statistical energy analysis. Proc. Acoustics 2012 Nantes Conference (2012), 1435-1440.
- [3] EN 12354-6:2003: Bauakustik – Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus den Bauteileigenschaften, Teil 6: Schallabsorption in Räumen. Beuth, Berlin, 2003.
- [4] Gerretsen, E.: Estimation methods for sound levels and reverberation time in a room with irregular shape or absorption distribution. Acta Acustica united with Acustica 92 (2006), 797-806.
- [5] Morse, P. M. & Bolt, R. H.: Sound Waves in Rooms. Reviews of Modern Physics 16 (1944), 69-150.