# Einsatz von Finite-Elemente-Methoden für die Berechnung akustischer Felder

Andreas Hüppe
*Vienna University of Technology, 1060 Vienna, Austria, Email: andreas.hueppe@tuwien.ac.at*

## Einleitung

Bei der Entwicklung neuer Produkte und Maschinen gewinnt deren Auslegung hinsichtlich ihrer akustischen Eigenschaften immer mehr an Bedeutung. Auslöser sind, neben anderen Faktoren, schärfere Lärmemissionsgesetze und ein gestiegener Kundenwunsch nach wohlklingenden und/oder leisen Produkten. Bei der Auslegung können durch immer schnellere Entwicklungszyklen nur noch wenige Prototypen angefertigt werden die eine messtechnische Überprüfung des Designs erlauben. Computergestützte Verfahren können an dieser Stelle die Produktentwicklung unterstützen und werden daher auch in der Praxis immer stärker eingesetzt. Eine numerische Untersuchung erlaubt nicht nur die Abbildung des Experiments am Rechner, sondern erlaubt durch fast unbegrenzte Möglichkeiten zur Auswertung, detaillierte Einblicke in die physikalischen Effekte. So können Schwächen in der Auslegung schneller erkannt und Optimierungspotentiale erschlossen werden. Eine Vielzahl von unterschiedlichen Verfahren steht hierbei zur Verfügung mit unterschiedlichen Eigenschaften hinsichtlich Genauigkeit, Gültigkeit und Rechenaufwand. Die Finite Elemente (FE) Methode bietet als etabliertes und verifiziertes Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen die größte Flexibilität hinsichtlich der physikalischen und geometrischen Modellierung. So bestehen bereits Formulierungen für unterschiedliche physikalische Felder sowie deren Kopplungen für den Einsatz u.a. im Bereich der Aeroakustik, Vibroakustik und Thermoakustik.

Bei der Entwicklung von FE Methoden für akustische Felder gilt es, bei hoher Recheneffizienz alle relevanten Effekte mit hoher Genauigkeit abzubilden. Im Folgenden soll auf einige Aspekte genauer eingegangen werden. Nach der Erläuterung der grundlegenden Gleichungen wird der Nutzen von Elementen höherer Ordnung anhand eines Beispiels aus der Automobilindustrie verdeutlicht. Nach einer kurzen Diskussion von Simulationen im Zeitbereich werden schließlich noch Möglichkeiten zur Berechnung der Schallabstrahlung in bewegten Medien verdeutlicht.

## Grundlagen

Grundlage der Beschreibung linearer Schallausbreitung liefert die Wellengleichung zweiter Ordnung. Für den Schalldruck $p^{\mathrm{a}}$ erhält man diese, aus den Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik und es ergibt sich

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p^{\mathrm{a}}}{\partial t^2} - \Delta p^{\mathrm{a}} = f^{\mathrm{w}} \,. \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $c$ die Schallgeschwindigkeit im homogenen Medium und $f^{\mathrm{w}}$ einen Quellterm durch den Beispielsweise aeroakustische Anregungen modelliert werden. Zur Herleitung der FE Formulierung wird (1) mit einer Testfunktion $\varphi$ multipliziert und es erfolgt eine Integration über das Ausbreitungsgebiet $\Omega$ mit Rand $\Gamma$. Damit erhält man die *schwache* Form der partiellen Differentialgleichung

$$\int_\Omega \varphi\,\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p^{\mathrm{a}}}{\partial t^2}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla p^{\mathrm{a}}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \varphi\frac{\partial p^{\mathrm{a}}}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega \varphi\, f^{\mathrm{w}}\mathrm{d}\Omega \,. \tag{2}$$

Die Diskretisierung des Rechengebiets mit dem Galerkin Ansatz führt dann auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{h}} + \mathbf{K}\mathbf{p}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{h}} = \mathbf{f}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{h}} \,, \tag{3}$$

Nach der Diskretisierung im Zeitbereich für $\ddot{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{h}}$ lässt sich das System in jedem Zeitschritt durch iterative oder direkte Verfahren lösen.

Ist hingegen nur der eingeschwungene Zustand von Interesse, lässt sich (4) mittels des ansatzes $\underline{p}^{\mathrm{a}} = \hat{p}^{\mathrm{a}} e^{j\omega t}$ in den Frequenzbereich transformieren und man erhält für eine gegebene Frequenz $\omega$

$$-\omega^2\mathbf{M}\underline{\ddot{\mathbf{p}}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{h}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{p}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{f}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{h}} \,. \tag{4}$$

## Elemente höherer Ordnung

Die meisten verfügbaren FE Programme setzen bei der diskretisierung des Volumens auf einen (bi-)linearen oder quadratischen Ansatz. Je nach Ansatz kann man die maximale Elementgröße im Gebiet mit der Daumenregel $h_{\max} = \lambda_{\min}/10$, im Falle von linearen Elementen bzw. $h_{\max} = \lambda_{\min}/4$ im Falle von quadratischen Elementen abschätzen. Hierbei wäre der numerische Fehler in der selben Größenordnung, obgleich bei der Verwendung eines quadratischen Ansatzes gröber diskretisiert werden kann. Da Lösungen lineare Wellengleichung im homogenen Medium glatt sind, wird dieser Effekt stärker, je höher die Elementordnung gewählt wird. Unter den Ansätzen für Elemente höherer Ordnung ist die Methode der spektralen Finiten Elemente besonders gut für akustische Felder geeignet. Diese Elemente beruhen auf der Auswertung von Lagrange Polynomen in Kombination mit einer Gauss-Lobatto Integrationsregel [1]. In Abb. 1 sind die Ansatzfunktionen mit deren Stützstellen für ein quadrilaterales Element dritter Ordnung aufgetragen. Man erkennt sowohl die nicht-äquidistante Verteilung der Stützstellen des Polynoms als auch die sogenannte $\delta$-Eigenschaft. Hierdurch werden ungewollte Oszillationen vermieden und sichergestellt, dass die numerische Lösung an jedem Freiheitsgrad der physikalischen entspricht. Ein weiterer Nachtverarbeitungsschritt, wie bei anderen Ansätzen höherer Ordnung nötig, entfällt

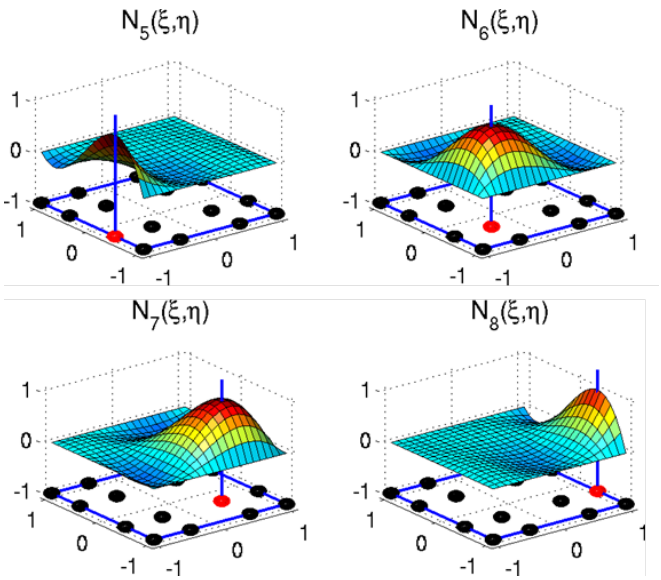


**Abbildung 1:** Visualisierung von vier der neun Ansatzfunktionen eines spektralen Elements dritter Ordnung.

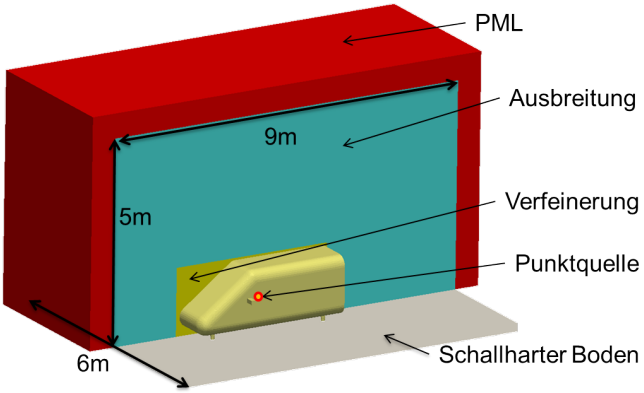


**Abbildung 2:** Berechnungsmodell für Untersuchung der Schallabstrahlung.

hierdurch. Zur Demonstration soll das Beispiel in Abb. 2 dienen. Das im Bild gezeigte, generische Fahrzeugmodel wird auf einem schallharten Boden platziert und von einem großen Luftvolumen von ca. 270m$^3$ umgeben. Um eine freie Schallabstrahlung zu simulieren, wird eine Absorptionsschicht nach dem Verfahren der *Perfectly-Matched-Layer* verwendet. Diese erlaubt die Absorption der emittierten Schallwellen unter beliebigem Einfallswinkel und verhindert so Reflexionen der Schallwelle am Gebietsrand [2, 3].

Das gezeigte Beispiel kombiniert einige Anforderungen, die in der Praxis häufig vorkommen.

- Freie Schallabstrahlung an einigen Gebietsrändern
- Komplexe Geometrien in einem begrenzten Bereich des Gesamtgebiets
- Großes Luftvolumen der freien Schallabstrahlung.

Für gewöhnlich wird für einen solchen Aufbau ein freies Tetraedergitter mit variabler Elementgröße verwendet, um einerseits geometrische Details aufzulösen und andererseits das große Volumen nicht zu fein zu diskretisieren. Im Gegensatz dazu, kommt bei den präsentierten Ergebnissen nicht-konforme Gitter zum Einsatz. Diese Verfahren erlauben die Kopplung von verschiedenen Diskretisierungen über ein gemeinsames Interface und erlauben so die Optimierung des Rechengitters auf einen bestimmten Bereich [5, 4]. Wie in Abb. 3 gezeigt, können auf diese Weise lineare Tetraeder zur Auflösung der Geometrie des Fahrzeugkörpers verwendet werden. Diese haben eine Elementkantenlänge von 3cm womit Schallwellen bis ca. 1kHz mit ausreichender Genauigkeit aufgelöst werden können. Über ein Interface wird dann mit einem gro-

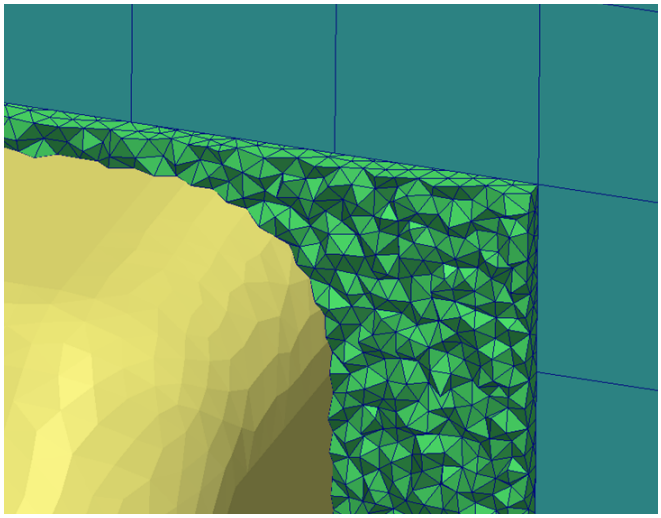

**Abbildung 3:** Nicht konformes Rechengitter.

bem Hexaedergitter, variabler Ordnung gekoppelt. Dieser Ansatz ermöglicht eine einfachere Vernetzung und ermöglicht eine Verwendung der guten Eigenschaften der spektralen Elemente. Die Hexaeder liefern eine Elementkantenlänge von 30cm. Eine Schallwelle von 1kHz wird also von nur einem finiten Element abgebildet. Wie in Abb. 4 zu sehen, ist eine Erhöhung der Elementordnung bis 5 notwendig, um die Schallwellen mit hoher Genau-

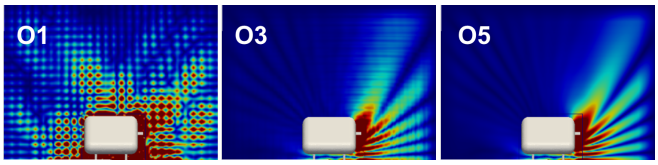


**Abbildung 4:** Konvergenz der Rechnung für verschiedene Ansatzordnungen im Außengebiet.

igkeit abzubilden. Bis auf kleinere Artefakte liefern Elemente dritter Ordnung aber schon einen guten Eindruck der Schallabstrahlung. Zur Visualisierung wurde hierbei ein Gitter mit 3.9 Millionen Freiheitsgraden herangezogen, was der notwendigen Diskretisierung mit quadratischen Elementen entspricht. Das verwendete Rechengitter mit Elementen fünfter Ordnung führt lediglich zu 2.7 Millionen Unbekannten bei gleicher Ergebnisqualität.

Mit diesem Vorgehen sind sogar höhere Frequenzbereiche auflösbar. Konturen des Schalldrucks mit dem Rechengitter sind beispielsweise in Abb. 5 dargestellt. Zu sehen ist

die Schallausbreitung, berechnet mit Elementen fünfter Ordnung und einer Anregung von 1.5kHz.

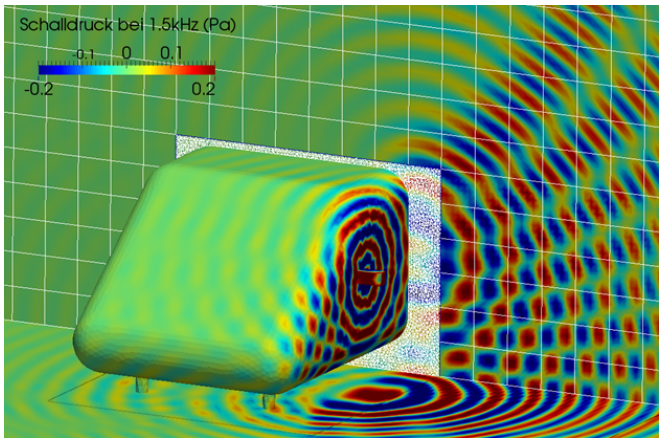


**Abbildung 5:** Konturen des Schalldrucks bei einer Anregung von 1.5kHz. Rechengitter ist in weiß dargestellt. Am feinen Gitter wurden Elemente erster Ordnung und am groben, äußeren Gitter Elemente fünfter Ordnung verwendet..

## Angepasste Verfahren für den Zeitbereich

In vielen Anwendungen sind Simulationen im Frequenzbereich allerdings nur von begrenztem Nutzen oder nicht möglich. Ist beispielsweise ein großer Frequenzbereich von Interesse oder treten transienten Effekte bei der Anregung auf, muss die Berechnung im Zeitbereich durchgeführt werden. Darüber hinaus ist das System (4) rein reellwertig, was die numerische Lösung erleichtert. Dabei müssen für solche Simulationen meist viele Zeitschritte berechnet werden, um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten. Meist kommen implizite Verfahren zweiter Ordnung zum Einsatz (z.B. Newmark-Schema [6]) für die sich die nötige Zeitschrittweite nach der maximalen Frequenz richtet. Als Daumenregel für eine gute Genauigkeit berechnet sich die Zeitschrittweite zu $\Delta t = 1/(12 f_{\max})$. Auch in diesem Fall ist der Einsatz von spektralen Finiten Elementen sehr vorteilhaft. Stützstellen der Lagrangepolynome und Integrationspunkte der *Gauss-Lobatto* Integrationsregel fallen hierbei zusammen, weswegen die Matrix $\mathbf{M}$ diagonal und damit analytisch invertierbar wird. Daher lassen sich explizite Zeitschrittverfahren nutzen, die zwar einen sehr kleinen Zeitschritt erfordern, dies aber durch niedrigen Rechenaufwand pro Zeitschritt wieder kompensieren.

Weitere Optimierungen sind durch angepasste Formulierungen möglich. Ausgehend von der Wellengleichung als System erster Ordnung in Abhängigkeit von Schalldruck $p^{\mathrm{a}}$ und Schallschnelle $\mathbf{u}^{\mathbf{a}}$,

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p^{\mathrm{a}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{a}} = f_{\mathrm{m}}\,, \tag{5}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{a}}}{\partial t} + \nabla p^{\mathrm{a}} = \mathbf{f_c}\,. \tag{6}$$

lassen sich optimierte Verfahren herleiten [7, 8]. Das resultierende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{a}} \\ \dot{\mathbf{u}^{\mathbf{a}}}_{\mathrm{h}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{R} \\ \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{a}} \\ \mathbf{u^a}_{\mathrm{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{m}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{c}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

hat, durch die Verwendung spektraler Elemente, wiederum eine diagonale Massenmatrix. Da nur noch Zeitableitungen erster Ordnung vorkommen, kann die Komplexität pro Zeitschritt weiter reduziert werden. Da die Verwendung von $C^0$ Elementen in diesem Fall allerdings zu Instabilitäten führt, werden hierbei gemischte FE eingesetzt, deren Eigenschaften sich auch zum Entwurf optimierter Algorithmen nutzen lassen [7, 8] . Bei der Methode der gemischten finiten Elemente werden die Unbekannten, Schalldruck und Schallschnelle, nicht in der gleichen Art und weise approximiert. In diesem Fall, wird der Schalldruck, wie bei FE üblich, kontinuierlich über die Elemente angenommen. Die Schallschnelle hingegen wird für jedes Element lokal definiert. Die praktische Konsequenz aus diesem Ansatz ist in Abb. 6 veranschaulicht. Wie man für dieses Beispiel mit nur drei Elementen sieht,

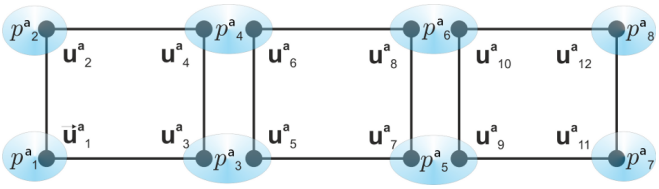


**Abbildung 6:** Definition der Unbekannten Schalldruck und Schallschnelle.

gibt es für einen Knoten im FE-Gitter einen Freiheitsgrad für den Schalldruck, aber mehrere für die Schallschnelle.

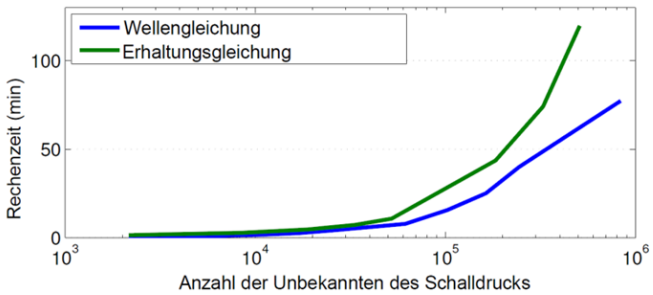


**Abbildung 7:** Rechenzeit für 600 Zeitschritte.

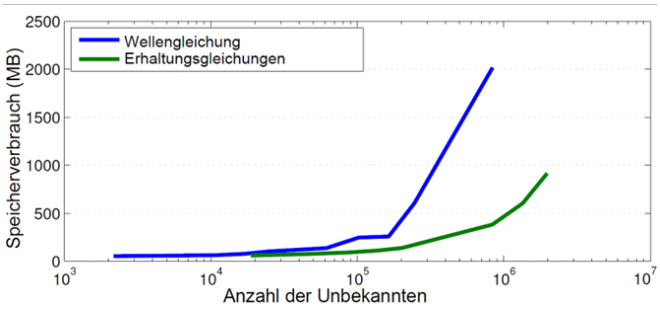


**Abbildung 8:** Durchschnittlicher Speicherverbrauch.

Es ist also nachvollziehbar, dass sich der Rechenaufwand im Vergleich zur Wellengleichung deutlich erhöht. Dennoch, durch das Ausnutzen von speziellen Eigenschaften dieser Formulierung und einer angepassten Implementierung, kann der Rechenaufwand erheblich reduziert werden. Die Graphen in Abb. 7 und Abb. 8 zeigen Rechenzeit und Speicherverbrauch für das Lösen der Wellengleichung und der Erhaltungsgleichungen. Obwohl sich im Falle der Erhaltungsgleichungen drei Unbekannte pro Gitterpunkt zusätzlich ergeben, ist der Rechenaufwand vergleichbar, bezüglich des Speicherverbrauchs sogar effizienter als das Lösen der Wellengleichung.

## Schallausbreitung in bewegten Medien

In einigen Anwendungen, z.B. aus dem Bereich der Aeroakustik, können Konvektions- und Brechungseffekte akustischer Wellen durch eine Hintergrundströmung nicht mehr vernachlässigt werden. Bereits bei geringen Mach-Zahlen sind diese Effekte sichtbar und müssen durch angepasste Formulierungen berücksichtigt werden. So lässt sich das System (5) unter Beirücksichtung einer zeitlich gemittelten Hintergrundströmung wie folgt anschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{\partial p^{\mathrm{a}}}{\partial t} + \nabla\cdot(p^{\mathrm{a}}\overline{\mathbf{u}})\right) + \nabla\cdot\mathbf{u}^{\mathbf{a}} &= f_{\mathrm{m}}\,, \\ \frac{\partial \mathbf{u}^{\mathbf{a}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{\mathbf{a}} + (\mathbf{u}^{\mathbf{a}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho}\nabla p^{\mathrm{a}} &= \mathbf{f}_{\mathbf{c}}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Form ist an die Linearisierten Euler Gleichungen (LEE) angelehnt, geht allerdings von einem isentropen Ausbreitungsmedium aus. Auch dieses System lässt sich mit der zuvor besprochenen Methode lösen, wobei aufgrund der konvektiven Terme, Modifikationen eingeführt werden müssen. Ohne diese kann keine stabile Rechnungen garantiert werden [8]. Mit diesem Verfahren lassen sich Wellenausbreitungen wie in Abb. 9 gezeigt berechnen. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in der Erweiterbarkeit.

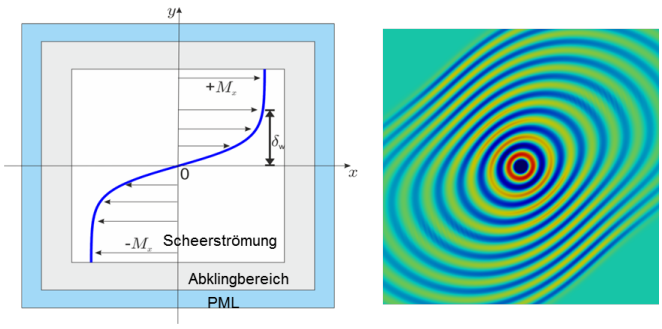


**Abbildung 9:** Schallausbreitung unter Berücksichtigung einer inhomogenen Hintergrundströmung. Links: Aufbau der Simulation. Rechts: Konturen des Schalldrucks.

Bei Anwendungen niedriger Mach-Zahl (kleiner 0.3) kann (8) bzw. die verwandten Acoustic Perturbation Equations (APE-2 [9]) weiter vereinfacht und, wie in [10] gezeigt, eine konvektive Wellengleichung mit aeroakustischem Quellterm hergeleitet werden. Diese lässt sich in Abhängigkeit des akustischen Schnellepotentials $\psi^{\mathrm{a}}$ (es gilt $\mathbf{u}^{\mathbf{a}} = -\nabla\psi^{\mathrm{a}}$) schreiben.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{D}^2\psi^{\mathrm{a}}}{\mathrm{D}t^2} - \Delta\psi^{\mathrm{a}} = \rho f_{\mathrm{m}}. \tag{9}$$

In der substantiellen Zeitableitung $\mathrm{D}/\mathrm{D} = \partial/\partial t + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla$, wird hierbei das divergenzfreie mittlere Strömungsfeld berücksichtigt. Gleichung (9) lässt sich aufgrund ihrer Struktur, gut in bestehende FE Programme integrieren und ermöglicht, als skalare Differentialgleichung eine effiziente Berechnung des Schallfeldes.

Zum Vergleich der Formulierungen (8) und (9) kann man eine Zylinderumströmung heranziehen. Der Zylinder wird in einen Strömungskanal eingebracht und die Schallausbreitung durch die Scheerschicht des Kanals in ein ruhendes Medium betrachtet. Abbildung 10 zeigt

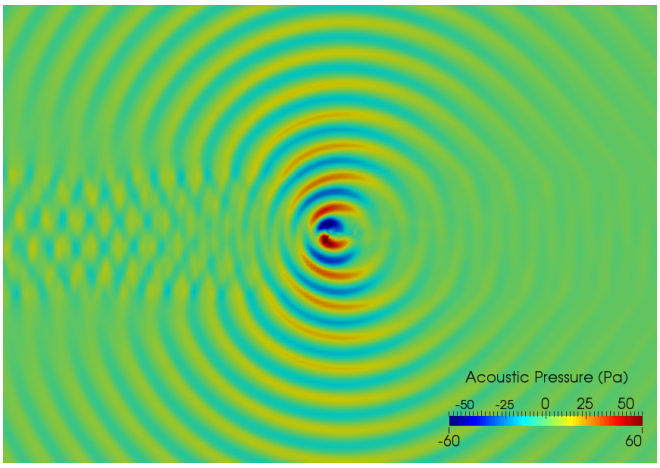


**Abbildung 10:** Konturen des Schalldrucks, berechnet durch Lösen von (8).

das Ergebnis der Berechnungen mit (8). Deutlich zu sehen ist die charakteristische Dipolabstrahlung des Zylinders. Auch gut sichtbar ist die Brechung der Schallwellen an der Scherschicht des Strömungskanals zum ruhenden Medium sowie die Frequenzerhöhung der Schallwellen stromaufwärts bzw. Verringerung stromabwärts. Der

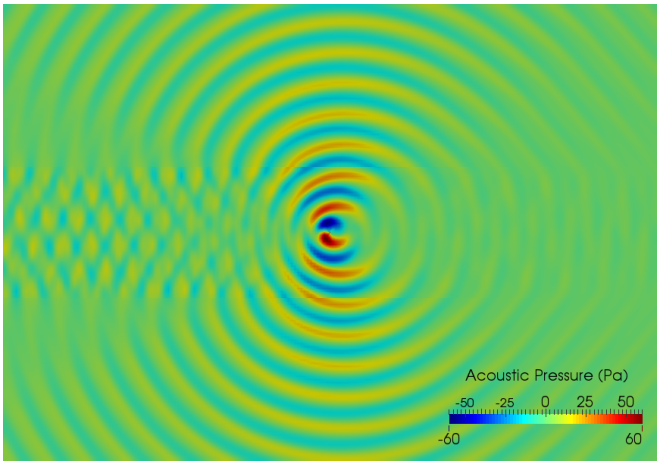


**Abbildung 11:** Konturen des Schalldrucks, berechnet durch Lösen von (9).

Vergleich mit den Ergebnissen der konvektiven Wellengleichung in Abb. 11 zeigt deutlich die Übereinstimmung der Ergebnisse.

## Zusammenfassung

Das Lösen der Wellengleichung mittels Finiten Elementen bietet trotz eines, in der Relation, hohen Rechenaufwands eine Vielzahl an Vorteilen. So wird die beschreibende partielle Differentialgleichung direkt gelöst und alle damit verbundenen Effekte wie Reflexion, Brechung oder Absorption an Hindernissen berücksichtigt. Darüber hinaus kann durch die Vielzahl an Möglichkeiten zur Auswertung der Ergebnisse, ein hoher Nutzen aus den Berechnungen gezogen und das physikalische Verständnis verbessert werden. Die in diesem Beitrag zusammengefassten Aspekte, gehen dabei über die etablierten Methoden hinaus und verdeutlichen, welche Potenziale dieser Ansatz bietet. Gerade hinsichtlich Anwendungen aus dem Bereich der Aeroakustik gibt es weiterhin großen Bedarf an Forschung und Entwicklung, um Anwendbarkeit und Ergebnisqualität zu erhöhen.

## Literatur

[1] Y. Maday, C. Bernardi: Spectral Methods, Handbook of Numerical Analysis, VOL. V Elsevier Science B.V., 1997

[2] B. Kaltenbacher, M. Kaltenbacher, I. Sim: A modified and stable version of a perfectly matched layer technique for the 3-d second order wave equation in time domain with an application to aeroacoustics. Journal of Computational Physics,2013

[3] A. Hüppe, M. Kaltenbacher: Stable matched layer for the acoustic conservation equations in the time domain. Journal of Computational Acoustics,2012

[4] A. Hansboa, P. Hansbo: An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2002

[5] S. Triebenbacher, M. Kaltenbacher, B. Flemisch, B. Wohlmuth: Non-Matching Grids for a Flexible Discretization in Computational Acoustics. Communications in Computational Physics, 2012

[6] T. Hughes: The Finite Element Method. Dover, 2000

[7] G. Cohen: Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations. Springer, 2002

[8] A. Hüppe, M. Kaltenbacher: Spectral finite elements for computational aeroacoustics using acoustic perturbation equations. Journal of Computational Acoustics, 2012

[9] R. Ewert, W. Schröder: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. Journal of Computational Physics, 2003

[10] A. Hüppe, J. Grabinger, M. Kaltenbacher, A. Reppenhagen, G. Dutzler, W. Kühnel: A Non-Conforming Finite Element Method for Computational Aeroacoustics in Rotating Systems. In Proceedings of the 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA-2014,2014, Atlanta, USA