

# Kopplung von finiten Elementen mit Randelementen im Orts-Wellenzahlraum zur Simulation von Tunnelstrukturen

Holger Waubke<sup>1</sup>, Wolfgang Kreuzer<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut für Schallforschung, Öst. Akad. der Wissenschaften, A-1040 Wien, holger.waubke@oeaw.ac.at

<sup>2</sup> Institut für Schallforschung, Öst. Akad. der Wissenschaften, A-1040 Wien, wolfgang.kreuzer@oeaw.ac.at

## Einleitung

Ein häufiges Problem sind Erschütterungen und Sekundärluftschall in Gebäuden in der Nähe von Eisenbahntunneln. Hier soll das Konzept einer kombinierten Rand- und Finite Elemente Methode vorgestellt werden, welche es erlaubt den Verlauf der Vibrationen im Boden zu behandeln. Um den Rechenaufwand beschränkt zu halten wird davon ausgegangen, dass sich die Geometrie in Längsrichtung nicht verändert. Unter dieser Annahme kann in Längsrichtung die Fourier Integraltransformation eingesetzt werden und eine Sequenz von 2D Problemen gelöst werden. Dieser Ansatz wird mit 2.5D bezeichnet.

Es wird eine Methode gezeigt, wie in einfacher Weise Rand- und finite Elemente im Fourier transformierten Raum abgeleitet werden können. Beide Ansätze benötigen eine Modifikation des Planscherelschen Theorems.

In einem früheren Beitrag wurde gezeigt, wie man das Randintegral für eine nur numerisch bekannte Greensche Funktion im transformierten Raum analytisch lösen kann [1-4]. Dabei wurde von einer konstanten Funktion über das Element ausgegangen. Hier wird die Lösung auf eine linear veränderliche Funktion erweitert.

## Modifiziertes Planscherelsches Theorem

Das Planscherelsche Theorem stellt eine Beziehung zwischen den Funktionen im Originalraum und im Fourier Integral-transformierten Raum auf. Dabei werden konjugiert komplexe Funktionen benötigt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x)\bar{\hat{g}}(k_x)dk_x \quad (1)$$

Unter Verwendung der Hermiteschen Eigenschaften der Fourier Transformation lässt sich ein modifiziertes Planscherelsches Theorem ableiten, dass keine Verwendung konjugiert komplexer Funktionen benötigt. Allerdings kommt es dabei zu einer Kopplung der positiven mit der negativen Wellenzahlen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x)\hat{g}(-k_x)dk_x \quad (2)$$

## 2.5 D Finite Elemente Methode

Mittels dieses Theorems lassen sich finite Elemente einfach transformieren. Dabei wird zunächst das Potential im Originalraum aufgestellt und in den transformierten Raum überführt. Das Volumen setzt sich aus dem Querschnitt  $\Omega$  und einer unbegrenzten Ausdehnung in  $x$  zusammen.

$$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T(x, y, z) \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \mathbf{u}^T(x, y, z) \mathbf{u}(x, y, z) + \mathbf{p}^T(x, y, z) \mathbf{u}(x, y, z) \right] d\Omega dx \quad (3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k_x, y, z) \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(-k_x, y, z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{\mathbf{u}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(-k_x, y, z) + \hat{\mathbf{p}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(-k_x, y, z) \right] d\Omega dk_x \quad (4)$$

Als nächstes wird wegen der Orthogonalität der Spektren jede Wellenzahl getrennt betrachtet.

$$\hat{\Pi}(k_x) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k_x, y, z) \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(-k_x, y, z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{\mathbf{u}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(-k_x, y, z) + \hat{\mathbf{p}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(-k_x, y, z) \right] d\Omega \rightarrow \min \quad (5)$$

Die Variation des Spektrums erfolgt in Richtung der Größen, die von der negativen Wellenzahl abhängig sind, um ein Gleichungssystem für die positive Wellenzahl bestimmen zu können.

$$\delta \Pi(k_x) = \int_{\Omega} \left[ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k_x, y, z) \mathbf{E} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(-k_x, y, z) + \rho \omega^2 \hat{\mathbf{u}}^T(k_x, y, z) \delta \hat{\mathbf{u}}(-k_x, y, z) + \hat{\mathbf{p}}^T(k_x, y, z) \delta \hat{\mathbf{u}}(-k_x, y, z) \right] d\Omega = 0 \quad (6)$$

## 2.5 D Randelemente Methode

Es wird wie zuvor die Randintegralmethode im Originalraum aufgestellt. Dabei wird die Umrandung in  $x$ -Richtung als unendlich angenommen und die Umrandung über den Querschnitt  $\Omega$  mit  $\Gamma$  gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{u}(x_o, y_o, z_o) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^T(x, y, z) \hat{\mathbf{t}}^*(x, y, z, x_o, y_o, z_o) d\Gamma dx - \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{t}}^T(x, y, z) \mathbf{u}^*(x, y, z, x_o, y_o, z_o) d\Gamma dx \end{aligned} \quad (7)$$

Der erste Teil der Gleichung wird durch die inverse Transformation des zugehörigen Spektrums ersetzt. Die beiden Integrale werden mittels des modifizierten Plancherschen Theorems durch die zugehörigen Spektren ersetzt.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(k_x, y_o, z_o) e^{k_x x_o} dk_x &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{t}}^*(-k_x, y, z, x_o, y_o, z_o) d\Gamma dk_x - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{t}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{u}}^*(-k_x, y, z, x_o, y_o, z_o) d\Gamma dk_x \end{aligned} \quad (8)$$

Es wird die negative Wellenzahl für die bekannten Lösungen der Greenschen Funktion verwendet, um ein Gleichungssystem für die positive Wellenzahlseite ableiten zu können. Wie zuvor wird wegen der Orthogonalität der Spektren das Gleichungssystem für jede Wellenzahl getrennt angeschrieben. Zugleich wird wegen der Verschiebungsinvarianz in  $x$  angenommen, dass die Testfunktion an der Stelle  $x_o=0$  angesetzt wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{u}}(k_x, y_o, z_o) &= \\ &= \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{t}}^*(-k_x, y, z, y_o, z_o) d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}}^T(k_x, y, z) \hat{\mathbf{u}}^*(-k_x, y, z, y_o, z_o) d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

### Greensche Funktion

Im Folgenden wird kurz die Greensche Funktion für den horizontal geschichteten anisotropen Halbraum abgeleitet. Die Ableitung erfolgt zunächst im vollständig transformierten Wellenzahlraum über die orthogonalen Koordinaten  $x, y$  und  $z$ . Dabei ist  $x$  die horizontale Richtung, in der die Struktur invariant ist. Diese Koordinate bleibt bis zum Schluss im transformierten Raum. Die zweite horizontale Koordinate ist  $y$  und die vertikale Koordinate ist  $z$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}(k_x, k_y, k_z, \Omega) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, t) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z + \Omega t)} dx dy dz dt \end{aligned} \quad (10)$$

Im transformierten Raum lautet die Dehnungs-Verformungs-Beziehung in Matrixschreibweise.

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} \\ \hat{\varepsilon}_{yy} \\ \hat{\varepsilon}_{zz} \\ \hat{\varepsilon}_{xy} \\ \hat{\varepsilon}_{yz} \\ \hat{\varepsilon}_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_z \\ jk_y/2 & jk_x/2 & 0 \\ 0 & jk_z/2 & jk_y/2 \\ jk_z/2 & 0 & jk_x/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Die Elastizitätsmatrix sei  $\mathbf{E}$ . Die Einträge in der Matrix sind beliebig aber symmetrisch und positiv definit und geben die Art der Anisotropie wieder. Damit ergibt sich die Spannungs-Verformungsbeziehung zu

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{zz} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{zx} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_z \\ jk_y/2 & jk_x/2 & 0 \\ 0 & jk_z/2 & jk_y/2 \\ jk_z/2 & 0 & jk_x/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

Abschießend benötigt man das Gleichgewicht der Kräfte für den Fall, dass keine äußeren Körperkräfte einwirken.

$$\begin{bmatrix} jk_x \hat{\sigma}_{xx} + jk_y \hat{\sigma}_{xy} + jk_z \hat{\sigma}_{zx} \\ jk_x \hat{\sigma}_{xy} + jk_y \hat{\sigma}_{yy} + jk_z \hat{\sigma}_{yz} \\ jk_x \hat{\sigma}_{zx} + jk_y \hat{\sigma}_{yz} + jk_z \hat{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} + \rho \Omega^2 \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Setzt man alle Gleichungen ineinander ein, so erhält man ein homogenes Gleichungssystem für die Verformungen  $u, v, w$  in  $x, y, z$ . Die Determinante des Gleichungssystems ist ein Polynom sechster Ordnung in  $k_z$ . Die Nullstellen werden mit  $k_{z,i}$  bezeichnet und die zugehörigen Eigenvektoren der Verformung mit  $\Psi_i$ . Es ergeben daraus die homogenen Lösungen für Verformungen und Spannungen im transformierten Raum mit den unbekanntenen Amplituden  $A_i$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(k_x, k_y, k_z, \Omega) &= \sum_{i=1}^6 [A_i \Psi_i(k_x, k_y, \Omega) \delta(k_z - k_{z,i})] \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(k_x, k_y, k_z, \Omega) &= \sum_{i=1}^6 [\mathbf{E} \hat{\mathbf{D}} A_i \Psi_i(k_x, k_y, \Omega) \delta(k_z - k_{z,i})] \end{aligned} \quad (14)$$

Die inverse Transformation über der vertikalen Koordinate  $z$  ist analytisch möglich.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(k_x, k_y, z, \Omega) &= \sum_{i=1}^6 [A_i \Psi_i(k_x, k_y, \Omega) e^{jk_{z,i} z}] \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(k_x, k_y, z, \Omega) &= \sum_{i=1}^6 [\mathbf{E} \tilde{\mathbf{D}}_i A_i \Psi_i(k_x, k_y, \Omega) e^{jk_{z,i} z}] \end{aligned} \quad (15)$$

Dabei ist die Matrix  $\mathbf{D}_i$  jetzt von den Eigenwerten  $k_{z,i}$  abhängig.

$$\tilde{\mathbf{D}}_i = \begin{bmatrix} jk_x & 0 & 0 \\ 0 & jk_y & 0 \\ 0 & 0 & jk_{z,i} \\ jk_y/2 & jk_x/2 & 0 \\ 0 & jk_{z,i}/2 & jk_y/2 \\ jk_{z,i}/2 & 0 & jk_x/2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Der nächste Schritt ist die Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten  $A_i$  jeder Schicht. Hierfür stehen an jedem Rand der Schicht sechs Gleichungen zur Bestimmung zur Verfügung:

- drei Kompatibilitäten der Verformungen am Rand und
- drei der Kraftgleichgewichte der freigeschnittenen Spannungen am Rand.

Am Rand geht zusätzlich die Kraft der Testfunktion ins Gleichgewicht ein. Dies bedeutet auch, dass in allen Tiefen in denen eine Testfunktion aufgebracht wird eine zusätzliche Schichtgrenze eingeführt werden muss. Das System ist invariant gegenüber Verschiebungen in den horizontalen Richtungen. Somit kann die Testfunktion ohne Einschränkung bei  $x=0$  und  $y=0$  aufgebracht werden.

Der freie obere Rand liefert nur drei Gleichungen der Spannungen, somit sind drei weitere Gleichungen notwendig. Diese werden gewonnen, indem die aufsteigenden Wellen des isotropen Halbraums, der den unteren Abschluss bildet, zu Null gesetzt werden. Mit diesem Ansatz wird Kausalität erreicht.

## Kopplung Randelemente und finite Elemente

Um auch Tunnelstrukturen berücksichtigen zu können, sollen finite Elemente für die Tunnelschale mit den Randelementen für den Boden gekoppelt werden.

Die Kopplung erfolgt zum einem, indem die Randspannungen der Randelemente Methode mit den Normal- und Schärbelastungen auf den Schalenelementen gekoppelt werden und zum anderen in den in den Knoten die Kompatibilität der Verformungen angesetzt werden. Diese Vorgehensweise funktioniert nur dann, wenn die Tunnelschale geschlossen ist. Für die Randintegrale über die unbekanntenen Spannungen werden dabei konstante Ansatzfunktionen über das Element verwendet, während für die unbekanntenen Knotenverformungen lineare Ansätze über die angrenzenden Elemente benötigt werden.

Das erste Problem das bei der Kollokationsmethode entsteht, ist, dass die Greenschen Funktionen eine Singularität an der Stelle der Testkraft besitzen und, dass zugleich die Greensche Funktion im  $y,z$  Raum nur numerisch bekannt ist, da die inverse Transformation über der Koordinate  $y$  nicht analytisch möglich ist.

Das zweite Problem ist, dass auf Höhe der Testfunktion eine Schichtgrenze einzuführen ist und, dass zugleich die Testfunktion bei der Kollokationsmethode in Elementmitte aufzubringen ist. Dieses Problem lässt sich lösen, indem das

Element in Sub-Elemente unterteilt wird, die sich die gleiche Ansatzfunktion teilen.

## Randintegral im transformierten Raum

Da die Greensche Funktion im  $y,z$  Raum nur numerisch bekannt ist, soll durch Vertauschen der Reihenfolge das Randintegral im transformierten Raum  $(k_y,z)$  analytisch gelöst werden und der spektrale Integralwert numerisch invers transformiert werden.

Die lineare Ansatzfunktion über ein Sub-Element der Länge  $l$  lautet:

$$g(s) = \begin{cases} (as + b), & -l/2 < s < l/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (17)$$

Die Verformungen und Spannungen der Greenschen Funktion sind im transformierten Raum bekannt. Sie setzen sich aus den sechs Wellentypen zusammen. Im Folgenden werden die Gleichungen für die Randspannungen  $\mathbf{T}_i$  hergeleitet. Es handelt sich dabei um die freigeschnitten und in das lokale Koordinatensystem rotierten Randgrößen. Ohne Änderung können anstelle dieser Größen auch die globalen Verformungen am Rand eingesetzt werden.

Die Greensche Funktion wird anschließend inverse über  $y$  transformiert und nach Gewichtung mit der Ansatzfunktion über den Rand integriert.

$$\mathbf{I} = \int_{s=-l/2}^{l/2} \int_{k_y \leftarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 \hat{\mathbf{T}}_i(-k_x, k_y, \alpha) e^{jk_{z,i}z} e^{jk_y y} (as + b) dk_y ds \quad (18)$$

Als nächster Schritt wird unter der Annahme, dass das Spektrum ausreichend glatt ist, die Reihenfolge der Integrationen ausgetauscht.

$$\mathbf{I} = \int_{k_y \leftarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 \hat{\mathbf{T}}_i(-k_x, k_y, \alpha) \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_{z,i}z} e^{jk_y y} (as + b) ds dk_y \quad (19)$$

Die Element-Koordinaten sind mit dem Winkel  $\alpha$  gegenüber den globalen Koordinaten  $y,z$  verdreht. Der Ursprung der Element-Koordinate liegt bei  $(y_0, z_0)$ . Damit ergibt sich:

$$z = s \sin(\alpha) + z_0, \quad y = s \cos(\alpha) + y_0$$

$$\mathbf{I} = \int_{k_y \leftarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 \hat{\mathbf{T}}_i(-k_x, k_y, \alpha) e^{j(k_{z,i}z_0 + k_y y_0)} \cdot \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{j(k_{z,i} \sin(\alpha) + k_y \cos(\alpha))s} (as + b) ds dk_y \quad (20)$$

Das innere Element-Integral lässt sich analytisch lösen. Wenn man eine Substitution einführt handelt es sich um eine inverse Fourier Integraltransformation über eine lineare Funktion.

$$k_s = k_{z,i} \sin(\alpha) + k_y \cos(\alpha)$$

$$\mathbf{I} = \int_{k_y \leftarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 \hat{\mathbf{T}}_i(-k_x, k_y, \alpha) e^{j(k_{z,i}z_0 + k_y y_0)} \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} (as + b) ds dk_y \quad (21)$$

Der Kern wird in einen konstanten und einen linearen Teil unterteilt:

$$\int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} (as + b) ds = \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} as ds + \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} b ds \quad (22)$$

Für den konstanten Anteil ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} b ds &= \left[ \frac{b}{jk_s} e^{jk_s s} \right]_{s=-l/2}^{l/2} = \\ &= \frac{b}{jk_s} (e^{jk_s l/2} - e^{-jk_s l/2}) = \\ &= \frac{b}{jk_s} 2j \sin\left(k_s \frac{l}{2}\right) = \frac{2b}{k_s} \sin\left(k_s \frac{l}{2}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

Der lineare Anteil liefert:

$$\begin{aligned} \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} as ds &= \left[ \frac{a}{jk_s} e^{jk_s s} \right]_{s=-l/2}^{l/2} - \int_{s=-l/2}^{l/2} \frac{a}{jk_s} e^{jk_s s} ds = \\ &= \frac{al}{2jk_s} (e^{jk_s l/2} + e^{-jk_s l/2}) + \frac{a}{k_s^2} [e^{jk_s s}]_{s=-l/2}^{l/2} = \\ &= \frac{-jal}{k_s} \cos\left(k_s \frac{l}{2}\right) + \frac{a}{k_s^2} (e^{jk_s l/2} - e^{-jk_s l/2}) = \\ &= \frac{-jal}{k_s} \cos\left(k_s \frac{l}{2}\right) + \frac{a}{k_s^2} 2j \sin\left(k_s \frac{l}{2}\right) = \\ &= j \left[ \frac{2a}{k_s^2} \sin\left(k_s \frac{l}{2}\right) - \frac{al}{k_s} \cos\left(k_s \frac{l}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Die Gesamtlösung lautet schließlich

$$\begin{aligned} \int_{s=-l/2}^{l/2} e^{jk_s s} (as + b) ds &= \\ &= \frac{2b}{k_s} \sin\left(k_s \frac{l}{2}\right) + ja \left[ \frac{2}{k_s^2} \sin\left(k_s \frac{l}{2}\right) - \frac{l}{k_s} \cos\left(k_s \frac{l}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Diese Lösung scheint eine Singularität an der Stelle  $k_s=0$  aufzuweisen. Über die L'Hospitalsche lässt sich aber beweisen:

$$\lim_{k_s \rightarrow 0} \left[ bl \operatorname{sinc}\left(k_s \frac{l}{2}\right) + j \frac{al}{k_s} \left[ \operatorname{sinc}\left(k_s \frac{l}{2}\right) - \cos\left(k_s \frac{l}{2}\right) \right] \right] = bl \quad (26)$$

Für den einfachen Fall  $l=1$ ,  $a=1$ ,  $b=1/2$  ergibt sich die folgende Funktion (Abb. 1). Es zeigt sich, dass die Amplitude eine abnehmende Funktion ist, was die inverse Transformation erleichtert. Allerdings alternieren Real- und Imaginärteil, was die Anwendung einer Filon Methode bei der inversen Transformation als zweckmäßig erscheinen lässt. Das numerisch zu lösende Integral der inversen Transformation lautet schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{k_y \leftarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 \hat{\mathbf{T}}_i(-k_x, k_y, \alpha) e^{j(k_{z,i} z_0 + k_y y_0)} \cdot \\ &\cdot \left[ bl \operatorname{sinc}\left(k_s \frac{l}{2}\right) + j \frac{al}{k_s} \left[ \operatorname{sinc}\left(k_s \frac{l}{2}\right) - \cos\left(k_s \frac{l}{2}\right) \right] \right] dk_y \quad (27) \\ k_s &= k_{z,i} \sin(\alpha) + k_y \cos(\alpha) \end{aligned}$$

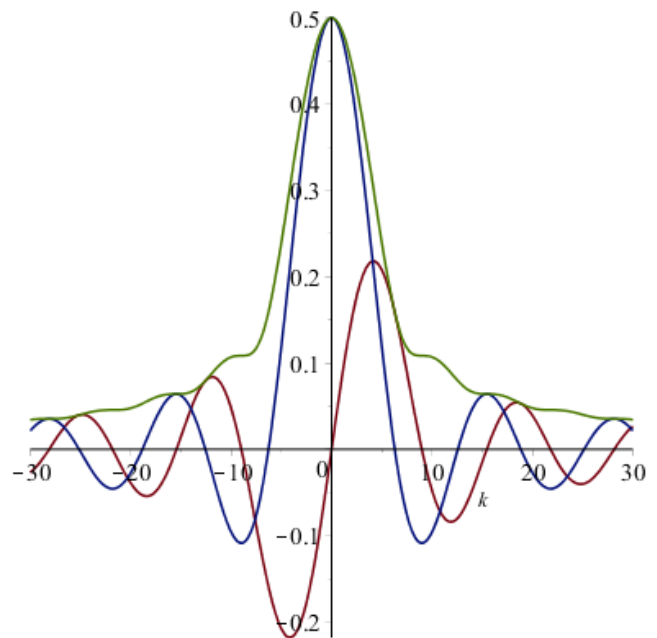


Abbildung 1: Verlauf des Realteils (blau) und Imaginärteils (rot) und des Betrags (grün) der Funktion aus Gleichung 25.

### Zusammenfassung

Es wurde eine Methode vorgestellt um Vibrationen aus Tunneln, wie sie bei Bahnen häufig sind mittels einer gekoppelten Rand und Finite Element Methode in 2.5D berechnet werden können. Dabei wird die Kollokationsmethode verwendet und die auftretenden Randintegrale im transformierten Raum analytisch gelöst und numerisch invers transformiert.

### Literatur

- [1] Waubke, H., Kreuzer, W: Dynamic load in a layered soil with anisotropic material, Conference on Acoustics AIA-DAGA 2013 (CD-ROM)
- [2] Waubke, H.: Vibrations in layered orthotropic soils. First Congress of Alps Adria Acoustic Association, Portoroz 2003, 189-198
- [3] Waubke, H., Balazs, P.: Transform Methods for Horizontally Layered Isotropic and Anisotropic Media with Obstacles. CFA-DAGA 2004, 331-332
- [4] Waubke, H., Kreuzer, W.: Vibrations from railways in tunnels and trenches with elastic anisotropic layered medium. 3rd Congress of the Alps Adria Acoustics Association, Graz 2007 (CD-ROM)