

# Simulation komplexer dreidimensionaler Strukturen von Lärmschutzwandaufsatzelementen mittels quasi-periodischer Randintegralmethode

Harald Ziegelwanger<sup>1</sup>, Paul Reiter<sup>1,2</sup>, Marco Conter<sup>1</sup>

<sup>1</sup> AIT Austrian Institute of Technology GmbH, Mobility Department, Transportation Infrastructure Technologies, Giefinggasse 2, 1210 Vienna, Austria, Email: harald.ziegelwanger@ait.ac.at

<sup>2</sup> Technische Universität Wien, Institut für Angewandte Physik, Wiedner Hauptstr. 8-10/134, 1040 Wien, Austria

## Einleitung

Lärmschutzwände (LSW) sind eine weit verbreitete technische Maßnahme zur Lärmreduktion des Straßen- und Schienenverkehrs (Kurze, 1974; Möser, 2012). Die simulationsgestützte Vorhersage intrinsischer akustischer Eigenschaften ermöglicht eine kostengünstige Produktoptimierung im Entwicklungsprozess von Lärmschutzwänden. Die Simulationen werden hierfür an die in-situ Methoden (Conter und Haider, 2009; Wehr et al., 2013) zur Messung von Reflexionsindex, Schalldämmindex und Schallbeugungsindex (engl. diffraction index, DI, EN 1793-4, 2015) angelehnt. Während zur Bestimmung des Reflexions- und Schalldämmindex der innere Aufbau einer LSW mittels Finite Elemente Methode (Marburg und Nolte, 2008) simuliert werden muss, kann der Schallbeugungsindex von LSW-Aufsatzelementen unter Verwendung der Randintegralmethode (engl. boundary element method, BEM, Gaul et al., 2003) bestimmt werden (Seznec, 1980). Der Effekt von LSW-Aufsatzelementen wurde für verschiedene Formen und Materialien untersucht (Ishizuka und Fujiwara, 2004; Toledo et al., 2016).

Um Prüfnormen für den Schallbeugungsindex, wie die EN 1793-4 (2015) und EN 16272-4 (2014), in der Simulation abzubilden, müssen Simulationen unter hohem Rechenaufwand durchgeführt werden, welcher durch die Prüfhöhe der LSW (mindestens 4 m) und dem Frequenzbereich (90 Hz bis 5,6 kHz) bestimmt ist. Der Rechenaufwand wird üblicherweise durch Vereinfachung auf die zweidimensionale BEM reduziert (Kasess et al., 2016; Gasparoni et al., 2013). Allerdings wird dadurch die Simulation auf Lärmschutzwände mit konstantem Querschnitt eingeschränkt. Ein interessanter Ansatz wurde in Fard et al. (2015) verfolgt. Hier wurde eine quasi-periodische BEM (QP-BEM) vorgestellt, welche die Simulation von dreidimensionalen Objekten mit periodisch wiederholendem komplexem Querschnitt erlaubt, den Rechenaufwand zugleich aber im Rahmen hält.

In dieser Studie wird eine Implementierung der QP-BEM gekoppelt mit der schnellen Multipolmethode vorgestellt. Die QP-BEM wird auf ein einfaches dreidimensionales Objekt (vibrierender Zylinder) angewandt, mit einer analytischen Lösung verglichen und evaluiert. Die Vorteile der Methode werden anhand der Anwendung auf ein exemplarisches LSW-Aufsatzelement gezeigt.

## Quasi-periodische Randintegralmethode

Ausgehend von der Helmholtzgleichung, ist das Schallfeld in einem externen Raum  $\Omega_e$  begrenzt durch die Oberfläche  $\Gamma$  eines Objektes  $\Omega$  bestimmt durch das Randintegral:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \\ -\phi_{inc}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei  $\phi(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{i\omega\rho}$  das Schallschnellepotential und  $v(\mathbf{x})$  die Schallschnelle im Punkt  $\mathbf{x}$  darstellt.  $\rho$  ist die Dichte des Mediums,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\phi_{inc}$  das Schnellepotential des einfallenden Schallfeldes.  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}$  und  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sind die Green'sche Funktion und dessen Ableitung in Normalrichtung von  $\Gamma$ .  $k = \frac{\omega}{c}$  ist die Wellenzahl,  $c$  die Schallgeschwindigkeit und  $i$  die imaginäre Einheit. Für Kollokation mit konstanten Basisfunktionen (Hunter und Pullan, 2002) folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}_i) + \sum_j \phi_j \int_{\Gamma_j} H(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \\ -\phi_{inc}(\mathbf{x}_i) + \sum_j v_j \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $j$  der Index der Elemente des unendlich ausgedehnten  $\Omega$  und  $i$  der Index der Kollokationspunkte in den Elementmittelpunkten sind. Für periodische Querschnitte und Schallquellen (z.B. Linienschallquelle) lässt sich Formel 2 auf eine unendliche Summe über die Querschnittsperioden simplifizieren (Fard et al., 2015):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}_i) + \sum_j \phi_j \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_{j,p}} H(\mathbf{x}_i, \mathbf{y} + p\mathbf{n}_p)d\mathbf{y} = \\ -\phi_{inc}(\mathbf{x}_i) + \sum_j v_j \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_{j,p}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y} + p\mathbf{n}_p)d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $p$  der Periodenindex und  $\mathbf{n}_p$  den Normalvektor auf der Periodenquerschnittsfläche (Länge entspricht der Breite des periodischen Ausschnitts) darstellen und sich  $i$  bzw.  $j$  hier nur noch auf Kollokationspunkte und Elemente im periodischen Ausschnitt beziehen. In der QP-BEM wird die unendliche Summe nach  $P$  periodischen

Fortsetzungen abgeschnitten:

$$-\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}_i) + \sum_j \phi_j \sum_{p=-P}^P \int_{\Gamma_{j,p}} H(\mathbf{x}_i, \mathbf{y} + p\mathbf{n}_p) d\mathbf{y} =$$

$$-\phi_{inc}(\mathbf{x}_i) + \sum_j v_j \sum_{p=-P}^P \int_{\Gamma_{j,p}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y} + p\mathbf{n}_p) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma. \quad (4)$$

Analog wird aus dem Kirchoff-Helmholtz Integral zur Berechnung des Schallfeldes in  $\Omega_e$ :

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \sum_j \phi_j \sum_{p=-P}^P \int_{\Gamma_{j,p}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y} + p\mathbf{n}_p) d\mathbf{y} - \phi_{inc}(\mathbf{x}) +$$

$$\sum_j v_j \sum_{p=-P}^P \int_{\Gamma_{j,p}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y} + p\mathbf{n}_p) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (5)$$

Als einfallendes Schallfeld  $\phi_{inc}$  wurde in dieser Studie eine Punktschallquelle verwendet, welche analog zum Objekt  $\Omega$  periodisch fortgesetzt wurde:

$$\phi_{inc}(\mathbf{x}_i) = Q_0 \sum_{p=-P}^P \frac{e^{ik|\mathbf{x}^* + p\mathbf{n}_p - \mathbf{x}_i|}}{4\pi|\mathbf{x}^* + p\mathbf{n}_p - \mathbf{x}_i|} \quad (6)$$

wobei  $x^*$  die Position der Punktquelle im periodischen Ausschnitt und  $Q_0$  die Quellenstärke darstellen. Zur Gewährleistung einer eindeutigen Lösung wurde die Burton-Miller Methode (Burton und Miller, 1971) und zur Beschleunigung der Berechnung die schnelle Multipolmethode (Fischer et al., 2004) verwendet. In der schnellen Multipolmethode wird die Systemmatrix in einen Nahfeld- und einen Fernfeldanteil zerlegt:

$$(N + SDT)\phi = b \quad (7)$$

wobei  $N$  die dünnbestzte *near-field* Matrix,  $T$  die *far-field signature* Matrix,  $D$  die *translation* Matrix und  $S$  die *near-field signature* Matrix darstellt (für nähere Details siehe Chen et al., 2008; Ziegelwanger et al., 2015a).  $b$  setzt sich aus dem einfallenden Schallfeld und Randbedingungen zusammen. In der quasi-periodischen BEM lässt sich die Systemmatrix in verkürzter Schreibweise mit:

$$\left( \sum_p N_p + S \sum_p D_p T \right) \phi = b \quad (8)$$

approximieren, wobei für  $N_p$  nur Elemente aus Clustern im Nahfeld und für  $D_p$  nur Cluster im Fernfeld summiert werden.

Die quasi-periodische BEM wurde basierend auf einem verfügbaren Open-Source BEM Code implementiert<sup>1</sup>. Simulationen wurden auf einem Linux Rechner, ausgestattet mit zwei Intel Xeon E5-2667 Prozessoren (3,30 GHz) und 128 GB Arbeitsspeicher, durchgeführt.

<sup>1</sup>Es wurde der BEM-Solver aus Mesh2HRTF (Version 0.1.2) verwendet (Open-Source Software-Package zur numerischen Berechnung von Außenohrübertragungsfunktionen, Ziegelwanger et al., 2015a,b). Verfügbar unter <http://mesh2hrtf.sourceforge.net> (zuletzt besucht: 15.03.2016)

## Evaluierung

Die Implementierung der quasi-periodischen BEM wurde für einen gleichmäßig pulsierenden unendlich ausgehenden Zylinder mit Radius  $R = 20$  cm evaluiert. Dafür wurde der Schalldruck zuerst nach Beranek und Mellow (2012) analytisch berechnet. Der Schalldruck lässt sich hier nach

$$p_{ref}(\mathbf{x}) = i\rho c \frac{H_0^{(2)}(k|\mathbf{x}|)}{H_1^{(2)}(kR)} v_0 \quad (9)$$

berechnen, wobei  $H_0^{(2)}$  und  $H_1^{(2)}$  Hankelfunktionen sind.  $v_0$  ist die vorgegebene Oberflächenschnelle.

Der Schalldruck wurde ebenfalls für einen periodischen Ausschnitt des Zylinders mit der quasi-periodischen BEM numerisch berechnet. Dafür wurde ein Mesh mit 20480 rechteckigen Elementen erstellt, wobei die Kantenlänge 5 mm betrug (entspricht ungefähr 14 Elemente pro Wellenlänge bei 5 kHz). Die Periodenbreite betrug 40 cm. Der Schalldruck wurde für Frequenzen von 100 Hz bis 5000 Hz ausgewertet.

Zur Quantifizierung der erreichten Rechengenauigkeit wurde der relative numerische Fehler für Punkte auf der Zylinderoberfläche  $\Gamma$  und für Punkte im externen Raum  $\Omega_e$  evaluiert

$$e_2^\Gamma = \frac{\|p_{num}^\Gamma - p_{ref}^\Gamma\|_2}{\|p_{ref}^\Gamma\|_2}, \quad e_2^{\Omega_e} = \frac{\|p_{num}^{\Omega_e} - p_{ref}^{\Omega_e}\|_2}{\|p_{ref}^{\Omega_e}\|_2}, \quad (10)$$

wobei  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm für die diskreten Werte des Schalldrucks darstellt.

Abb. 1 zeigt die Ergebnisse der Evaluierung für den numerischen Fehler auf der Oberfläche und im externen Raum. Für  $P > 300$  (entspricht einer Länge des Zylinders von 240,4 m, welche in der Berechnung berücksichtigt wird) sinkt der relative numerische Fehler unter 0,5%.

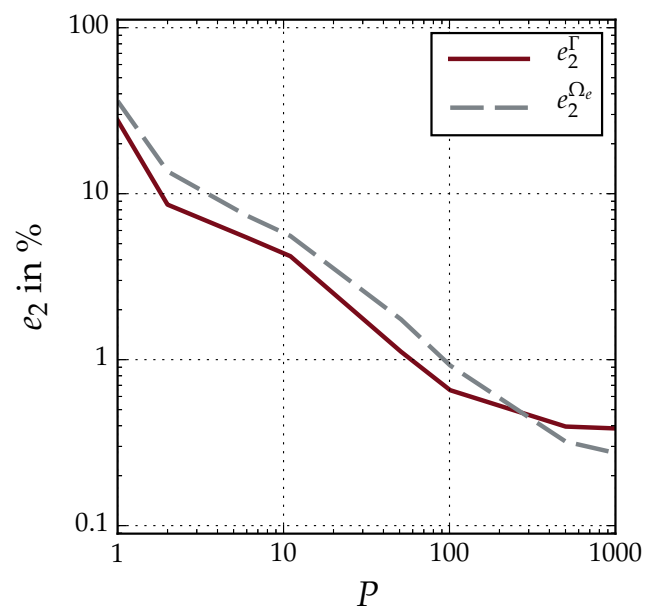


Abbildung 1: Relativer numerischer Fehler als Funktion der Anzahl an periodischen Fortsetzungen.

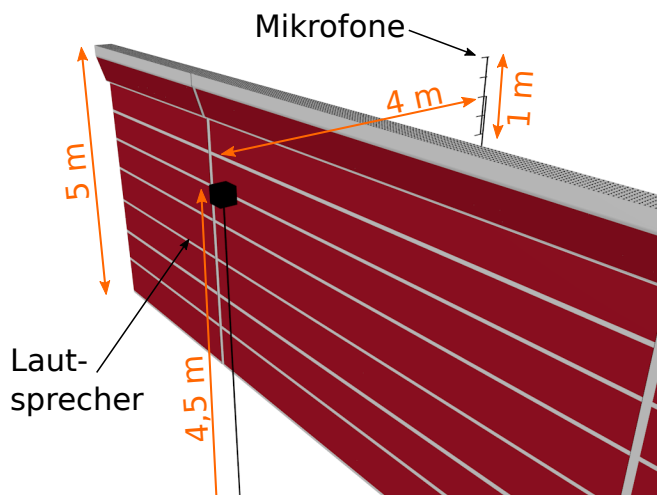


Abbildung 2: 3D-Ansicht des Setups zur Bestimmung des Schallbeugungsindexes.

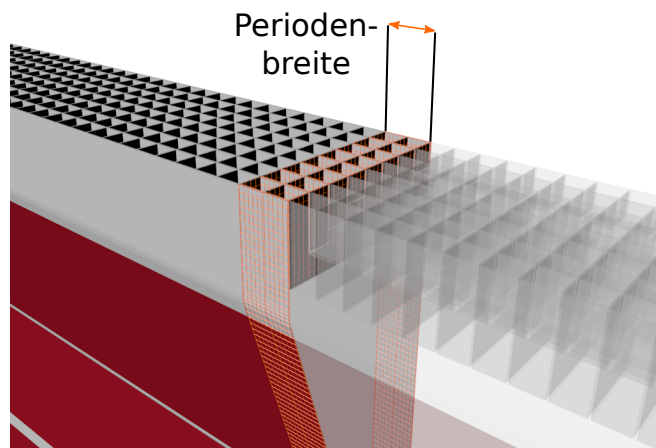


Abbildung 3: 3D-Modell eines periodischen Lärmschutzwand-Aufsatzelementes. Gitterstruktur für den periodischen Ausschnitt (in orange).

### Vorläufige Resultate

Unter Verwendung der QP-BEM lässt sich der DI für LSW-Aufsatzelemente angelehnt an die in-situ Messmethode nach EN 1793-4 und EN 16272-4 bestimmen. Abb. 2 zeigt eine 3D-Ansicht des genormten Messaufbaus. In der QP-BEM wird ein periodischer Ausschnitt gewählt (siehe Abb. 3) und der Lautsprecher mit der Periodenbreite des Ausschnitts fortgesetzt. Das Schallfeld wird für zwei Lautsprecherhöhen (4,5 m und 4,85 m) simuliert und an den Mikrofonpositionen ausgewertet. Danach lässt sich der DI in den Terzbändern nach

$$DI_j = -10 \log \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{\int |p_{k,LSW}(f)|^2 df}{\Delta f_j} \frac{\int |p_{k,FF}(f)|^2 df}{\Delta f_j} \right\} \quad (11)$$

berechnen, wobei  $p_{LSW}$  und  $p_{FF}$  die Schalldrücke gemessen an der LSW bzw. im Freifeld sind.  $f$  ist die Frequenz und  $\Delta f_j$  ist die Breite des  $j$ -ten Terzbandes.  $k$  ist der Index der genormten Messpositionen. Die Differenz zu den  $DI_j$  einer einfachen Wand ergibt den  $\Delta DI_{situ}$  für ein LSW-Aufsatzelement:

$$\Delta DI_{situ} = DI_{ad,situ} - DI_{0,situ}. \quad (12)$$

wobei  $DI_{ad,situ}$  für das LSW-Aufsatzelement und  $DI_{0,situ}$  für eine einfache Wand berechnet wird. Durch Gewichtung der einzelnen Terzbänder mit dem genormten Schienen- oder Straßenverkehrslärmspektrum  $L$  lässt sich die Einzahlangabe  $DL_{\Delta DI,situ}$  für die Schallbeugung nach

$$DL_{\Delta DI,situ} = -10 \log \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{18} 10^{0.1L_j} 10^{-0.1\Delta DI_{situ,j}}}{\sum_{j=1}^{18} 10^{0.1L_j}} \right\} \quad (13)$$

berechnen. Abb. 4 zeigt das Ergebnis für das in Abb. 3 dargestellte exemplarische LSW-Aufsatzelement.

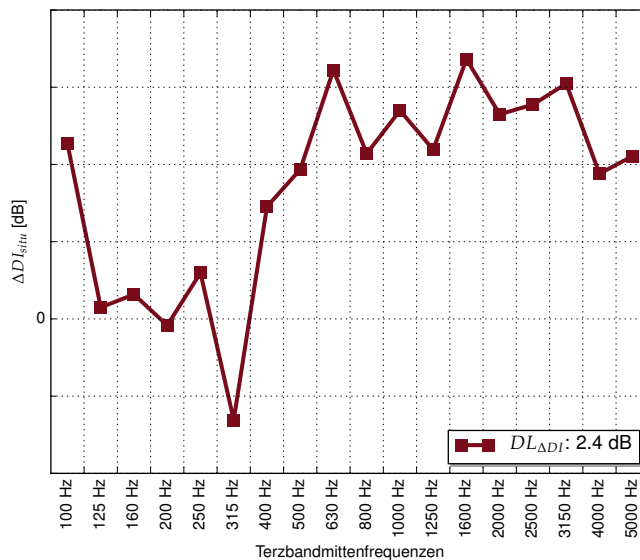


Abbildung 4:  $\Delta DI$  und Einzahlangabe  $DL_{\Delta DI}$  für das in Abbildung 3 gezeigte LSW-Aufsatzelement.

### Ausblick

Mithilfe der QP-BEM kann der Effekt von LSW-Aufsätzen weiter untersucht und es können diese für den Einsatz an Straße und Schiene optimiert werden. Als Vorteil gegenüber der zweidimensionalen BEM erweist sich die Möglichkeit Strukturen in der dritten Dimension abzubilden.

In der momentanen Implementierung können Cluster in der schnellen Multipolmethode nicht über die Periodenbreite eines Ausschnitts ragen. Es ist mit einem weiteren Performancegewinn zu rechnen, wenn eine zusätzliche Clusterlevel mit größeren Clusterradien für periodisch fortgesetzte Cluster im Fernfeld zur Verfügung stehen würde. Für die weitere Evaluierung der QP-BEM werden Benchmarks mit geometrisch komplexeren Objekten benötigt (z.B. analog zum Cats-Eye Modell für die klassische 3D-BEM).

## Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Firma Forster Metallbau GmbH, im Speziellen bei Robert Reichartzeder und Hannes Starkl, für die Zusammenarbeit in den Bereichen Konstruktion und Prototypenbau.

## Literatur

- Beranek, L. L., Mellow, T. J., 2012. *Acoustics: Sound Fields and Transducers*. Academic Press, Amsterdam, Netherlands.  
<http://www.sciencedirect.com/science/book/9780123914217>
- Burton, A. J., Miller, G. F., 1971. The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 323 (1553), 201–210.  
<http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1971.0097>
- Chen, Z.-S., Waubke, H., Kreuzer, W., 2008. A formulation of the fast multipole boundary element method (FMBEM) for acoustic radiation and scattering from three-dimensional structures. *Journal of Computational Acoustics* 16 (2), 303–320.  
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218396X08003725>
- Conter, M., Haider, M., 2009. Noise Reducing Devices: an Austrian Experience with the new European Technical Specification for Measurements of in-Situ Sound Diffraction. In *Proceedings of the NAG/DAGA 2009 International Conference on Acoustics*, 836–839.
- EN 16272-4, 2014. *Railway applications - track - noise barriers and related devices acting on airborne sound propagation - test method for determining the acoustic performance - part 4: Intrinsic characteristics - in situ values of sound diffraction under direct sound field conditions*.
- EN 1793-4, 2015. *Road traffic noise reducing devices - test method for determining the acoustic performance - part 4: Intrinsic characteristics - in situ values of sound diffraction*.
- Fard, S. M. B., Peters, H., Kessissoglou, N., Marburg, S., 2015. Three-dimensional analysis of a noise barrier using a quasi-periodic boundary element method. *The Journal of the Acoustical Society of America* 137 (6), 3107–3114.  
<http://dx.doi.org/10.1121/1.4921266>
- Fischer, M., Gauger, U., Gaul, L., 2004. A multipole Galerkin boundary element method for acoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 28 (2), 155–162.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2003.07.001>
- Gasparoni, S., Wehr, R., Conter, M., Haider, M., Reiter, P., 2013. BEM simulations of diffraction-optimized geometrical noise barriers, with a focus on tunability. *Acoustics Australia* 41, 202–206.
- Gaul, L., Kögl, M., Wagner, M., 2003. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer, Berlin, DE.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-05136-8>
- Hunter, P., Pullan, A., 2002. *FEM/BEM Notes*.
- Ishizuka, T., Fujiwara, K., 2004. Performance of noise barriers with various edge shapes and acoustical conditions. *Applied Acoustics* 65 (2), 125 – 141.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apacoust.2003.08.006>
- Kasess, C. H., Kreuzer, W., Waubke, H., 2016. Deriving correction functions to model the efficiency of noise barriers with complex shapes using boundary element simulations. *Applied Acoustics* 102, 88 – 99.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apacoust.2015.09.009>
- Kurze, U. J., 1974. Noise reduction by barriers. *The Journal of the Acoustical Society of America* 55 (3), 504–518.  
<http://dx.doi.org/10.1121/1.1914528>
- Marburg, S., Nolte, B. (Eds.), 2008. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-77448-8>
- Möser, M., 2012. *Technische Akustik*. Springer-Verlag.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-30933-5>
- Seznec, R., 1980. Diffraction of sound around barriers: Use of the boundary elements technique. *Journal of Sound and Vibration* 73 (2), 195 – 209.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X\(80\)90689-6](http://dx.doi.org/10.1016/0022-460X(80)90689-6)
- Toledo, R., Aznárez, J., Greiner, D., Maeso, O., 2016. Shape design optimization of road acoustic barriers featuring top-edge devices by using genetic algorithms and boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 63, 49 – 60.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.10.011>
- Wehr, R., Haider, M., Conter, M., Gasparoni, S., Breuss, S., 2013. Measuring the sound absorption properties of noise barriers with inverse filtered maximum length sequences. *Applied Acoustics* 74 (5), 631 – 639.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apacoust.2012.11.006>
- Ziegelwanger, H., Majdak, P., Kreuzer, W., 2015a. Mesh2HRTF: Open-source software package for the numerical calculation of head-related transfer functions. In: *Proceedings of the 22nd International Congress of Sound and Vibration*. Florence, IT.
- Ziegelwanger, H., Majdak, P., Kreuzer, W., 2015b. Numerical calculation of listener-specific head-related transfer functions and sound localization: Microphone model and mesh discretization. *The Journal of the Acoustical Society of America* 138 (1), 208–222.  
<http://dx.doi.org/10.1121/1.4922518>