

Über die Sensitivität des FRAC für eine objektive Validierung mechanischer Modelle

Christopher Blech¹, Xiaojun Shi¹, Sabine C. Langer¹

¹ *Institut für Konstruktionstechnik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: c.blech@tu-braunschweig.de*

Einleitung

Die Validierung von mechanischen Ersatzmodellen ist heute und in den nächsten Jahrzehnten trotz zunehmender Genauigkeit und Akzeptanz der Modelle essentiell. Beschränkt man sich auf die direkte Strukturantwort eines Systems im Frequenzbereich, so finden sich in der Literatur häufig rein optische Vergleiche von Frequenzgängen einzelner Freiheitsgrade oder Durchschnittsgrößen aus Versuch und Berechnung. Der optische Vergleich, beispielsweise zweier Eingangsdmittanzen, bestätigt jedoch aufgrund des subjektiven Einflusses keinesfalls die Validität eines gesamten mechanischen Ersatzmodells. Weiterhin sind optische Vergleiche kaum automatisierbar. Besser wäre die Anwendung objektiver Kriterien zum Vergleich zweier Frequenzgänge.

Bei Strukturen hoher modaler Dichten oder bei auftretenden Nichtlinearitäten ist eine Transformation in den Modalraum nicht möglich, sodass Kriterien wie MAC nicht genutzt werden können. FRAC (Frequency Response Assurance Criterion) bietet die Möglichkeit, Frequenzgänge direkt miteinander zu vergleichen.

Objektive Kriterien wie FRAC könnten neben der Validierung auch angewendet werden, um die Frequenzgänge zweier Modelle zu vergleichen. So können ganz unabhängig von einer realistischen Modellierung Modellunterschiede objektiv quantifiziert werden. Sowohl die Validierung als auch ein Modellvergleich setzt eine Interpretierbarkeit des FRAC voraus. Dieser Beitrag untersucht deshalb an einem einfachen rein numerischen Beispiel die Sensitivität des FRAC auf Variationen der Steifigkeit und Dämpfung.

Eine weitere Anwendung stellt die inverse Parameteridentifikation dar. Als Beispiel kann die Steifigkeit einer Randbedingung automatisiert gefunden werden. FRAC dient dabei als Vergleich der zu erreichenden globalen Strukturantwort unter Variation der zu findenden Steifigkeit. Ebenso möglich wäre eine Anwendung im Rahmen einer Optimierung, wobei ein zu erreichender Frequenzgang vorgegeben wird. Beide Anwendungen haben gemein, dass sie ein eindeutiges globales Maximum fordern. Im zweiten Schwerpunkt dieses Beitrags wird deshalb das Verhalten der auftretenden Maxima unter Änderung der Frequenzauflösung untersucht.

Das FRAC

FRAC ist als normiertes quadratisches Skalarprodukt der als Vektoren aufgefassten Frequenzgänge definiert [1]:

$$FRAC(j) = \frac{({}_1H_j(f))^T \cdot {}_2H_j(f)}{({}_1H_j(f))^T \cdot {}_1H_j(f)} \frac{({}_2H_j(f))^T \cdot {}_2H_j(f)}{({}_2H_j(f))^T \cdot {}_2H_j(f)} \quad (1)$$

Dabei stellen ${}_1H_j(f)$ und ${}_2H_j(f)$ die zu vergleichenden Frequenzgänge dar, welche im Rahmen der genannten Anwendungen Modelllösungen oder Ergebnisse aus experimentellen Versuchen sein können. FRAC stellt neben vielen anderen Kriterien (z.B. FDAC, CCF)[2] eines für direkte Vergleiche im Frequenzbereich dar.

FRAC erlaubt für jeden definierten Freiheitsgrad des betrachteten Systems einen direkten Vergleich auf einer Skala von Null bis Eins. Eine Eins stellt dabei ein identisches Systemverhalten dar. In [1] wird beschrieben, dass niedrige Dämpfungen zu sehr kleinen FRAC-Werten führen und eine Interpretation des FRAC schwer möglich ist. Weiterhin wird die Anwendung des Kriteriums auf logarithmierte Werte sowie die Anwendung eines Steifigkeitsfaktors α eingeführt. Letzterer streckt oder staucht einen der Frequenzgänge künstlich mit ${}_{neu}H_j(f) = {}_{alt}H_j(\sqrt{\alpha} \cdot f)$ und erzeugt so nachträglich eine Anpassung der Steifigkeit. Beide Vorgehen führen zu höheren FRAC-Werten und werden aufgrund von Konsistenz in diesem Beitrag nicht angewendet.

Das Kriterium wird hier in seiner Ursprungsdefinition auf den globalen Freiheitsgrad der mittleren quadratischen Schnelle nach [3] angewendet:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N S_i \cdot \tilde{v}_i^2 \quad (2)$$

Dabei beschreibt S die Gesamtfläche, S_i die zu aufzusummierende Teilfläche, \tilde{v}_i die Schnelle der Teilfläche und N die Anzahl der betrachteten Punkte. Es ergibt sich die rein reelle Größe $\overline{v^2}$.

Modell

Als Grundlage der Untersuchungen dient ein einfaches Modell einer Aluminium-Rechteckplatte unter Einzellast F bei (x_F, y_F) (siehe Abbildung 1). Die Struktur mit den Abmessungen 900x600 mm wird mittels finiten Plattenelementen (Mindlin-Reissner Theorie) mit 9 Knoten und quadratischen Ansatzfunktionen vernetzt und im Frequenzbereich gelöst. Als Randbedingung wird die Verschiebung in Normalenrichtung der Platte gesperrt sowie eine zusätzliche Steifigkeit am Verdrehfreiheitsgrad um die Kante der Platte angesetzt. Als Ausgangswert gilt eine Steifigkeit von $c_T = 1000$ Nm/rad. Es wird der haus-eigene Solver ELPASO genutzt. Die Nutzung komplexer E-Moduli \underline{E} unter Einführung des Verlustfaktors η nach [3] erlaubt die Berücksichtigung einer Strukturdämpfung. Es gilt:

$$\underline{E} = E \cdot (1 + i\eta) \quad (3)$$

Ein Verlustfaktor von 0,01 dient als Ausgangswert und stellt eine Abschätzung einer typischen Metallkonstruktion dar (z.B. Autokarosserie) [3]. Als besonders niedriger

Wert wird 0,0001 (abgeschätzte innere Dämpfung von Aluminium nach [3]) gewählt, und als besonders hoher Wert 0,1 für eine mit Dämpfungsfolie belegte Plattenstruktur gesetzt. Die weiteren Materialparameter finden sich in Tabelle 1. Das Modell der Rechteckplatte wird

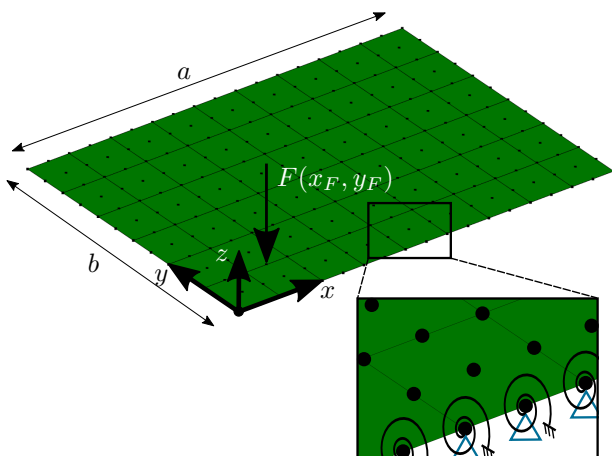


Abbildung 1: Für die Sensitivitätsstudie verwendetes Plattenmodell.

Tabelle 1: Ausgangsparameter des Plattenmodells

Parameter		Ausgangswert
Seitenkante	a	0,9 m
Seitenkante	b	0,6 m
Stärke	t	0,03 m
Kraft	F	1 N
Kraftort in x	x_F	0,15 m
Kraftort in y	y_F	0,1 m
Dichte	ρ	2700 kg/m ³
E-Modul	E	7e10 N/m ²
Verlustfaktor	η	0,01
Federsteifigkeit	c_T	1000 Nm/rad

zunächst mit einer Frequenzschrittweite von $\Delta f = 1$ Hz gelöst. Jeder folgende FRAC-Wert wird mit dem Frequenzgang ${}_1\bar{v}^2(f)$ des Ausgangsmodells und dem neu durch Parametervariation entstandenen Frequenzgang ${}_2\bar{v}^2(f)$ gebildet. Es wird angenommen, dass die Massenverteilung meist genauer bekannt ist als die Steifigkeiten, sodass die Variationen des E-Modul ($E \pm 10\%$) und der Federsteifigkeit ($c_T \pm 10\%$) in diesem Modell von besonderem Interesse ist. Die Parametervariationen werden unter Berücksichtigung verschiedener Frequenzstützweiten und der genannten Verlustfaktoren durchgeführt.

Ergebnisse

Variation des E-Modul

Der E-Modul E wird in 1%-Schritten von 6,3e10 N/m² bis 7,7e10 N/m² variiert. Mittels FRAC wird $\bar{v}^2(f)$ des neuen Modells und des Ausgangsmodells verglichen. In Abbildung 2 ist $\bar{v}^2(f)$ für die Extremwerte von E bei $\eta = 0,01$ dargestellt. Der Vergleichsgraph mit $E =$

7e10 N/m² ist hervorgehoben. Es ist deutlich zu sehen, dass aufgrund der Steifigkeitsvariation die Eigenfrequenzen verschoben werden und die Amplituden in den Eigenfrequenzen leicht variieren. Dies ist bedingt durch die Frequenzauflösung. Abbildung 3 zeigt nun das Ergebnis

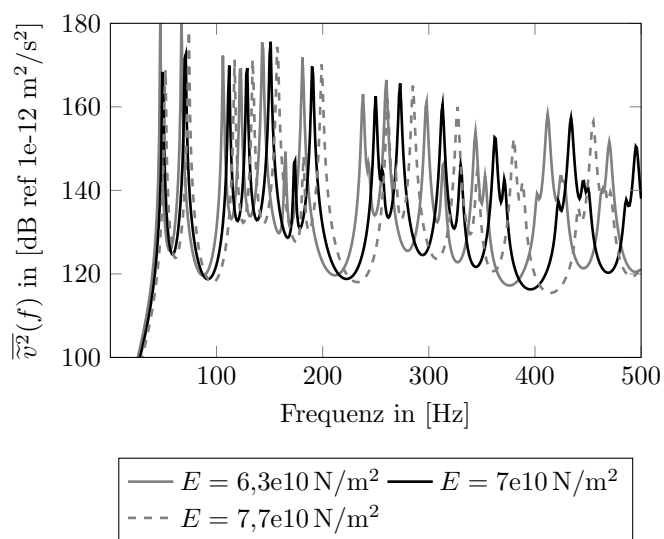


Abbildung 2: Frequenzgänge für die Variation des E-Modul bei $\eta = 0,01$

der FRAC-Berechnung auf Basis der Absolutwerte. Bei $E = 7e10$ N/m² ist FRAC stets Eins, da identische Frequenzgänge miteinander verglichen werden.

Bei einem Verlustfaktor von $\eta = 0,01$ ergibt sich neben einem eindeutigen globalen Maximum ein symmetrisch abfallendes FRAC zu beiden Seiten. Bei einer Abweichung des E-Modul über 3% sinkt das Kriterium bereits deutlich unter 0,1. Oft ist jedoch eine so genaue Bestimmung des E-Modul kaum möglich. Trotzdem könnte in diesem Fall das Kriterium aufgrund der Eindeutigkeit genutzt werden, um den passenden Wert des E-Modul zu finden. Bei einer Steigerung des Verlustfaktors auf $\eta = 0,1$ ergeben sich trotz starker Abweichungen des E-Modul durchgehend FRAC-Werte über 0,7, was ein sehr passendes Modell suggeriert. Im Gegensatz dazu bewegt sich FRAC bei einem Verlustfaktor von 0,0001 um Null. Obwohl das Modell bekanntermaßen passend ist und nur leichte Abweichungen der Steifigkeit eingebracht werden, zeigt FRAC hier eine starke Sensitivität bei niedrigen Verlustfaktoren.

Eine Variation des E-Modul führt unter Nutzung verschiedener Dämpfungseigenschaften zu stark unterschiedlichen Ergebnissen. Durch die dominierende Wirkung der Dämpfung ist eine Modellbewertung nicht möglich. Bei Verlustfaktoren von 0,01 und 0,1 stellen sich jedoch eindeutige Maxima ein, was den Einsatz gradientenbasierter Optimierer für eine Parameteranpassung erlaubt.

Variation der Federsteifigkeit

Die Federsteifigkeit c_T wird ebenfalls in 1%-Schritten von 900 Nm/rad bis 1100 Nm/rad variiert. Abbildung 4 zeigt das Ergebnis der FRAC-Berechnung.

Es ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei der Variation

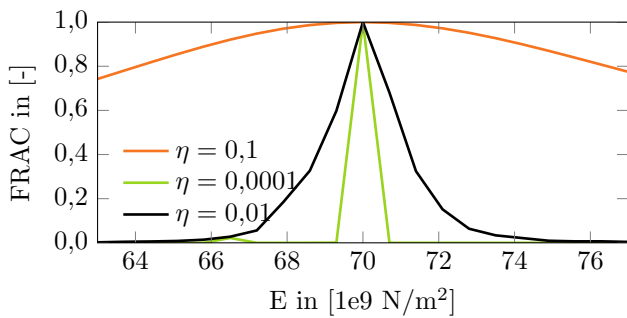


Abbildung 3: Variation des E-Modul unter Nutzung verschiedener Verlustfaktoren

des E-Modul. Der Unterschied zwischen den gewählten Dämpfungseigenschaften ist noch deutlicher erkennbar. Bei einem Verlustfaktor von 0,1 bewegt sich FRAC nahe Eins. Dies erlaubt keine Bewertung des Modells, da die Federsteifigkeit entgegen dem ingenieurmäßigen Verständnis unerheblich erscheint. Neben den stark abfallenden Werten bei $\eta = 0,0001$ erscheinen nun mehrere markante Nebenmaxima. In diesem Fall kann der Einsatz eines gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus für eine Parameteranpassung zu falschen Ergebnissen führen.

Beide Variationen zeigen, dass der Einsatz von FRAC nach aktuellem Stand weder für eine objektive Beurteilung von Modellen noch für eine Parameteranpassung möglich ist.

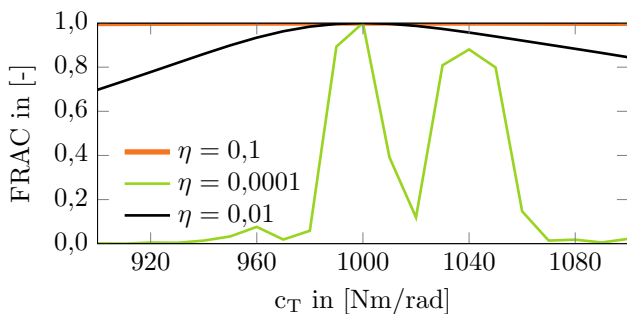


Abbildung 4: Variation der Federsteifigkeit unter Nutzung verschiedener Verlustfaktoren

Konvergenzverhalten

Ein wichtiger erster Schritt in Richtung einer sinnvollen Anwendung von FRAC ist die Sicherstellung von Konvergenz im Frequenzbereich. Mit kleineren Frequenzschrittweiten Δf konvergiert der Frequenzgang $\bar{v}^2(f)$. Es wird erwartet und nachfolgend am Beispiel der Variation der Federsteifigkeit c_T gezeigt, dass auch FRAC konvergiert. Abbildung 5 zeigt auf einer logarithmischen Skala das Verhalten von FRAC für einen Dämpfungsfaktor von $\eta = 0,0001$ unter verschiedenen Frequenzschrittweiten. Mit kleineren Δf konvergiert FRAC gegen einen erkennbaren Verlauf. Um ein eindeutiges Maximum zu erzeugen, müssten noch kleinere Frequenzschrittweiten genutzt werden. Dies erscheint jedoch im Rahmen einer solch typischen Anwendung der Vibroakustik nicht

praktikabel. Vor dem Hintergrund komplexerer Geometrien ist entsprechend eine effizientere Auflösung des Frequenzganges in den Eigenfrequenzen Teil zukünftiger Forschungsarbeiten. Die Herausforderung besteht in einer ausreichenden Auflösung für ein konvergiertes FRAC ohne vorherige Kenntnis der Eigenfrequenzen. Weiter-

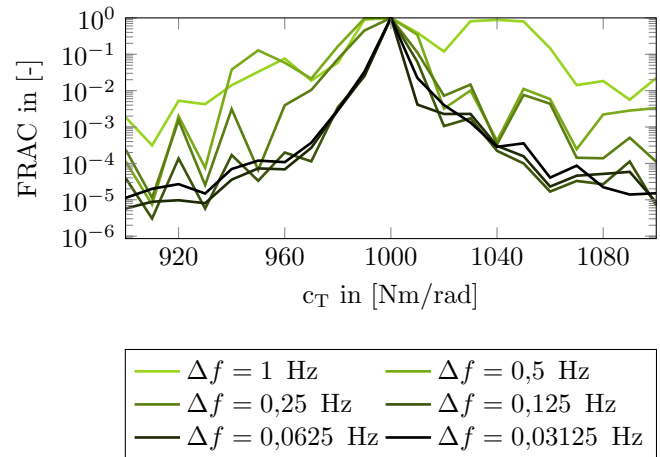


Abbildung 5: Veränderung des FRAC-Verlaufs durch abweichende Frequenzauflösung bei $\eta = 0,0001$

hin ist anzumerken, dass FRAC nicht einseitig gegen einen Grenzwert strebt. Vielmehr entscheidet bei niedrigen Dämpfungsfaktoren ein zufälliges Aufeinandertreffen der Eigenfrequenzen und der Frequenzstützstellen zunächst darüber, wo und mit welcher Amplitude sich Maxima im diskreten Frequenzgang ergeben. Dies führt bei der Nutzung des Skalarproduktes im FRAC zu einem alternierenden Konvergenzverhalten bei eindeutigen Grenzwert.

Abbildung 6 bestätigt dieses Verhalten. Gezeigt wird FRAC zweier Variationen ($c_T \pm 1\%$) auf einer logarithmischen Skala abhängig von der Frequenzschrittweite.

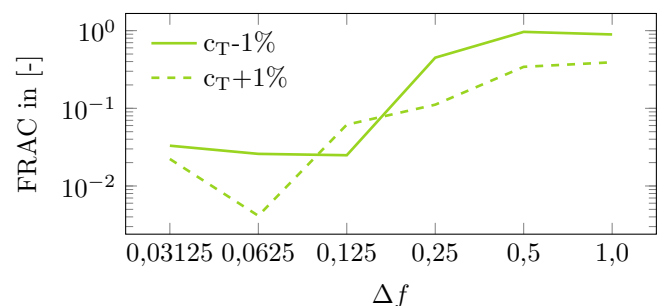


Abbildung 6: Konvergenz des FRAC durch erhöhte Frequenzauflösung bei $\eta = 0,0001$

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag werden Sensitivitäten des FRAC anhand von Parametervariationen am Modell einer Plattenstruktur numerisch ermittelt. Ergänzend zu vorhandener Literatur kann die hohe Sensitivität auf Dämpfungseigenschaften anhand des Modells gezeigt werden. Für die stark gedämpfte Struktur ($\eta = 0,1$) ergeben sich trotz Variationen der Steifigkeit hohe FRAC-Werte nahe Eins. Dahingegen bewegen sich die FRAC-Werte bei reiner Materialdämpfung ($\eta = 0,0001$) meist bei Null.

Neben der Dämpfung hat die Frequenzauflösung einen entscheidenden Einfluss auf FRAC. Abhängig von der Frequenzauflösung können sich insbesondere bei schwach gedämpften Strukturen sprunghafte Änderungen des FRAC ergeben. Es wird gezeigt, dass eine Konvergenz des FRAC mit einer feineren Frequenzauflösung erreicht werden kann. Zudem können auf diese Weise Nebenmaxima eliminiert werden.

Die Eindeutigkeit des FRAC kann so für die Anwendungen der inversen Parameteridentifikation und der Optimierung hergestellt werden. Die Entwicklung einer effizienten Schrittweitensteuerung im Frequenzbereich ist hier von besonderem Interesse. Abschließend sei betont, dass FRAC im Sinne des Ingenieurs noch nicht objektiv einsetzbar ist. Die Validität von oder die Unterschiede zwischen Modellen können entsprechend nicht vergleichbar quantifiziert werden. Weitere Studien werden ein besseres Verständnis und nötige Modifikationen von FRAC oder ähnlichen Kriterien aufzeigen.

Literatur

- [1] Heylen, W., Lammens, S.: „FRAC: A Consistent way of Comparing Frequency Response Functions”, Proceedings, International Conference on Identification in Engineering, Swansea, pp. 48-57, 1996.
- [2] Allemang, R. J.: „The modal assurance criterion – twenty years of use and abuse.” Sound and vibration 37.8, pp. 14-23, 2003.
- [3] Kollmann, F. G.: „Maschinenakustik: Grundlagen, Meßtechnik, Berechnung, Beeinflussung”, Springer-Verlag, 2011.