

**Schätzung des statistischen Vertrauensbereichs von Mittelungspegeln bei Immissionsmessungen**

D. Kühner

**1. Einleitung**

In der VDI-Richtlinie 3723 Teil 1 [1] wie auch in der ISO/DIS 1996-2 [2] wird zur Berechnung des Vertrauensbereichs des Mittelungspegels aus einer Stichprobe mit  $i$  gleich 1 bis  $n$  unabhängigen Messungen unterstellt, dass die delogarithmierten Pegel  $\{J_i\}$  normal verteilt sind. Grundsätzlich sind die Pegelverteilungen bei Immissionsmessungen jedoch nicht bekannt, da diese sowohl von unterschiedlichen Emissions- als auch Ausbreitungsbedingungen abhängen können. Allerdings kann aufgrund der Entfernung zum akustischen Schwerpunkt und den Betriebsbedingungen die mögliche Spanne der Immissionspegel ausgehend von Gewerbe oder Verkehr als in der Regel bekannt angenommen werden. Unter der Annahme, dass die Pegel normalverteilt sind, lässt sich die Qualität des Ansatzes unmittelbar prüfen.

**2. Normalverteilung der Pegel**

Die ISO 1996-2 [2] berechnet den Vertrauensbereich, innerhalb dem der Mittelungspegel  $L_{eq}$  liegen soll, wie folgt:

$$Gl.(1) \quad V_{Bo,u} = L_n \pm a \cdot \ln(1 + t_{\alpha,n-1} \cdot s_{i_n} / (n-1)^{1/2} / J_n),$$

wobei  $a = 10/\ln(10) \sim 4.343$ ,  $L_n$  der Mittelungspegel der Stichprobe mit  $n$  unabhängigen Messungen,  $J_n$  der delogarithmierte Mittelungspegel,  $t_{\alpha,n-1}$  der Wert der Studentfunktion für das Signifikanzniveau  $\alpha$  und  $s_{i_n}$  die Standardabweichung der delogarithmierten Pegel der Stichprobe  $\{J_{1..n}\}$  ist. Mit  $\alpha$  gleich 0,1 wird erwartet, dass der  $L_{eq}$  in 80% der Fälle innerhalb des Vertrauensbereiches liegt. Die VDI 3723-1 bildet mathematisch korrekt den Vertrauensbereich mit wechselndem Vorzeichen vor dem Studentfaktor ab, was bei kleinen Stichproben  $n$  zu einem negativen Wert in der Klammer führen kann. Nach der DIN 45645 [7] soll bei einer möglichen Spanne der Pegel mit 3 dB, der Stichprobenumfang  $n$  mindestens 3, bei 6 dB mindestens 5 betragen. In Abbildung 1 ist unter der Annahme, dass die Pegel normal verteilt sind, mit einer numerischen Simulation (40000 Wiederholungen) die Wahrscheinlichkeit (blau) dargestellt, mit der der  $L_{eq}$  nach Gl.(1) im Vertrauensbereich nach Gl.(1) liegt:

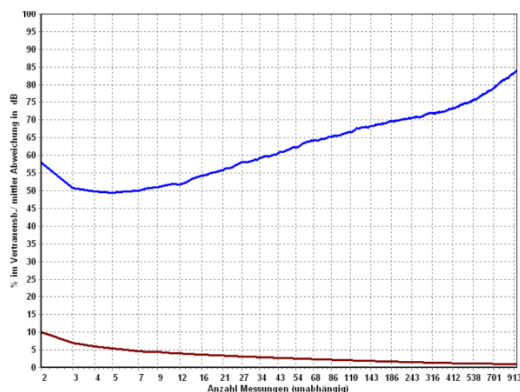


Abbildung 1: % der im Vertrauensbereich liegenden  $L_{eq}$ 's für eine Normalverteilung der Pegel mit einer Varianz  $\sigma$  von 6,5 dB (blau) bei einer Spanne von 25 dB. Betrag des Vertrauensbereiches nach [2] für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,2 (braun).

Dabei wurde eine Varianz der Pegel mit 6,5 dB angenommen und bei der Simulation die Spanne der möglichen Messwerte auf

25 dB begrenzt. Abbildung 1 zeigt, dass der  $L_{eq}$  bei einer Stichprobe zwischen 2 und 7 Messungen in mehr als 50% der Fälle außerhalb des Vertrauensbereichs nach Gl.(1) liegt.

Der Mittelungspegel  $L_{eq}$  einer Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma$  im Pegelraum ergibt sich aus:

$$Gl.(2) \quad L_{eq} = a \cdot \ln(1 / (\sqrt{2\pi}\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0.5 \cdot s \cdot q^r (\frac{L-\mu}{\sigma}) + L/a} dL) = \mu + \sigma^2 / (2a).$$

Die Verteilung der delogarithmierten Pegel folgt einer Lognormalverteilung. In [3] sind unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der Vertrauensbereiche des Mittelwertes bei solchen Verteilungen dargestellt. Eine Möglichkeit ist:

$$Gl.(3) \quad V_{Bo,u} = L_n \pm /-(t_{\alpha,n-1}^2 \cdot s_n^2 / (n-1) + (s_n^2 / (2a) - ((n-1) / \chi_{\alpha,n-1}^2)^2)^{1/2},$$

wobei  $\chi_{\alpha,n-1}^2$  die Chi-Quadrat-Funktion ist, die beispielsweise in [4, 5] tabelliert sind.  $s_n$  ist die Standardabweichung der gemessenen Pegel. Das Signifikanzniveau  $\alpha$  wird entsprechend der oberen und unteren Vertrauensbereichsgrenze gewählt.

Geht man von einer Spanne von 16 dB bei normal verteilten Pegeln aus, dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der  $L_{eq}$  im Vertrauensbereich nach Gl.(3) liegt (rot), nach Gl.(1) (blau) aus Abbildung 2:

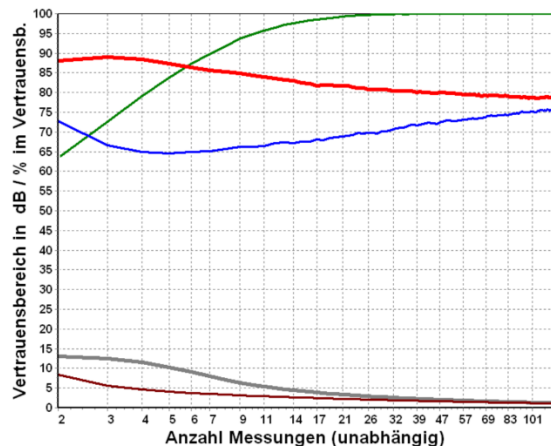


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeit  $V_{Bu} < L_{eq} < V_{Bo}$  nach Gl.(3) rot, nach Gl.(1) blau, Vertrauensbereich nach Gl.(3) (grau) und Gl.(1) (braun), Wahrscheinlichkeit Betrag  $L_n - L_{eq}$  kleiner 3 dB (grün),  $\alpha = 0.1$ .

Bis 25 Messungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der  $L_{eq}$  im Vertrauensbereich nach Gl.(3) liegt, größer 80% und sinkt danach auf den durch  $\alpha = 0,1$  vorgegebenen Wert auf 80% ab. Der Vertrauensbereich nach Gl.(1) (Abbildung 2, braun) ist kleiner als der nach Gl.(3) (Abbildung 2, grau). Die Wahrscheinlichkeit, dass der  $L_{eq}$  im Vertrauensbereich nach Gl.(1) liegt, steigt ab  $n = 4$  von 65% bis  $n=100$  auf 75% an. Damit ist für normal verteilte Pegel nach Gl.(3) gegenüber Gl.(1) eine deutlich gesichere Aussage über den Vertrauensbereich auch bei kleinen Stichproben möglich. Die Ungenauigkeit der Abschätzung nach Gl.(1) wird durch die grüne Kurve in Abbildung 2 verdeutlicht, die die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass der Betrag der Differenz  $L_n - L_{eq}$  kleiner 3 dB ist. Bei 2 unabhängigen Messungen beträgt die Wahrscheinlichkeit 65% und steigt bei 4 auf 80%! Der Vertrauensbereich nach Gl.(1) unterschreitet die  $\pm 3$  dB entsprechend 6 dB schon bei  $n=3$  im Mittel, bei einer Wahrscheinlichkeit der Übereinstimmung von 67%.

**3. Andere Verteilungen**

Zur Prüfung der Frage, ob Gl.(3) näherungsweise für andere Verteilungen sinnvolle Schätzungen liefert, werden zusätzlich die Gleich-, Weibull-, Dreieck- und zwei gipflige Cosinusverteilungen herangezogen. Durch numerische Integration der Verteilungen wird ausgehend vom arithmetischen Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma$  der Mittelungspegel  $L_{eq}$  der Verteilungen bestimmt und daraus der Parameter  $a_1$  in Anlehnung an Gl.(2) :

$$Gl. (5) \quad a_1 = \sigma^2 / (2 \cdot (L_{eq} - \mu))$$

als Funktion der Varianz berechnet.

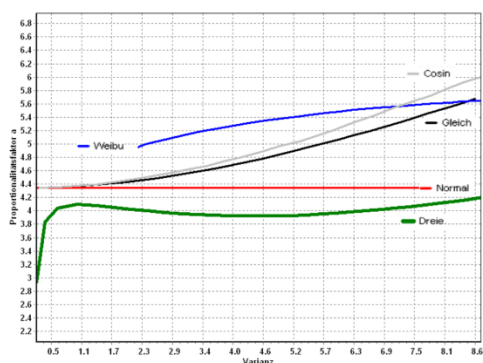


Abbildung 3: Abhängigkeit des Parameters  $a_1$  von der Varianz  $\sigma$  der Verteilungen

Außer für die Dreiecksverteilung ist der Faktor  $a_1$  größer a. Das bedeutet, dass Gl.(2) zu Überschätzungen bei diesen Verteilungen neigt. Lediglich für  $\sigma$  Werte kleiner 0,5 dB ist bei der Dreiecksverteilung von Unterschätzung auszugehen. Für die Dreiecksverteilung mit einer Spanne von 15 dB und der daraus resultierenden Varianz von 2,1 dB ergibt sich für den Vertrauensbereich:

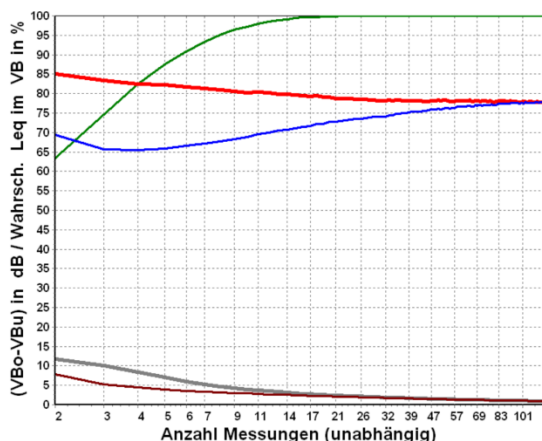


Abbildung 4: Dreiecksverteilung. Wahrscheinlichkeit, dass der  $L_{eq}$  im Vertrauensbereich liegt nach Gl.(3) (rot), nach Gl.(1) (blau).  $(V_{b_0} - V_{b_u})$  nach Gl.(3) (grau) und Gl.(1) (braun). Wahrscheinlichkeit,  $L_n - 3 < L_{eq} < L_n + 3$  dB (grün).  $\alpha$  gleich 0,1.

Gegenüber Abb. 2 mit einer vergleichbaren Spanne, sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass der  $L_{eq}$  im Vertrauensbereich liegt, etwas ab, bleibt jedoch oberhalb von 75% und ist deutlich besser als nach Gl.(1), insbesondere für die in der Praxis üblichen kleinen Stichproben. Die übrigen Verteilungen mit vergleichbaren Spannen bzw. Varianzen führen zu Vertrauensbereichen, deren Einhaltungswahrscheinlichkeiten bei 75% und mehr liegen in guter Übereinstimmung mit dem vorgegebenen Signifikanzniveau von 0,1.

#### 4. Zusammenfassung

Mit dem Ansatz nach Gl.(3) ist eine deutliche Verbesserung der Bestimmung des Vertrauensbereichs sowohl gegenüber der VDI 3723-1 [1] als auch der ISO DIS 1996-2 [2] insbesondere für kleine Stichproben zu erreichen, die weitgehend unabhängig vom Typ der Verteilung ist.

#### 5. Schrifttum

- [1] VDI 3723 Blatt 1 Anwendung statistischer Methoden bei der Kennzeichnung schwankender Geräuschmissionen
- [2] ISO/DIN 1996-2 Akustik, Beschreibung, Beurteilung und Messung von Umweltlärm – Teil 2: Bestimmung des Umgebungslärmpegels
- [3] Confidence Intervals for the Mean of a Log-Normal Distribution. Journal of Statistical Education Vol. 13,1 2005 U. Olsen
- [4] Statistical Tolerance Regions. K. Krishnamoorthy T. Mathew John Wiley Sons Inc. Publication 2009
- [5] Introduction to Statistical Analysis W. Dixon, F. Massey Jr. Mac Graw W-Hill Book Company L.of Congress Nr. 68-171180
- [6] Handbook of Mathematical Functions M. Abramowitz, I. Stegun Dover Publications New York L. of Congress Nr. 65-12253
- [7] DIN 45645-1 Ermittlung des Beurteilungspegels aus Messungen - Teil 1: Geräuschmissionen in der Nachbarschaft 1994