

## Wavelet und Frame Techniken für BEM in der Akustik

Wolfgang Kreuzer<sup>1,3</sup>, Tomasz Hrycak<sup>1</sup>, Markus Weimar<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Österreichische Akademie der Wissenschaften, Institut für Schallforschung, 1040 Wien, Österreich

<sup>2</sup> Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik und Informatik

<sup>3</sup> Email: wolfgang.kreuzer@oew.ac.at

### Einleitung

Die Randelementmethode (*boundary element method*, kurz BEM) ist ein numerisches Verfahren, welches in der Akustik häufig benutzt wird, um Abstrahl-, Reflexions-, und Streuprobleme zu lösen. Dabei wird das geometrische Objekt, an dem eine Schallwelle gestreut wird, mittels eines Gitters aus ebenen Dreiecken und/oder Vierecken beschrieben, und die Lösung der Helmholtzgleichung mittels einer Basis  $S_i(\mathbf{x})$  aus einfachen Funktionen auf diesem Gitter dargestellt:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_i S_i(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Die Helmholtz-Randintegralgleichung wird dann mittels Galerkin- oder Kollokationsverfahren in ein lineares Gleichungssystem umgewandelt, mit dem die unbekannten Koeffizienten  $c_i$  bestimmt werden können (siehe z.B. [4, 7]).

Um eine hinreichend genaue Lösung erzielen zu können, sollten (als Faustregel) mindestens 6 Elemente pro Wellenlänge verwendet werden [6]. Außerdem ist eine Verfeinerung des Gitters rund um geometrische Singularitäten wie Ecken und Kanten, sowie in Gebieten mit sich schnell ändernden Randbedingungen notwendig. Zur Auflösung dieser lokalen Singularitäten gibt es bereits einige Ansätze, welche auf adaptiven Algorithmen führen [1, 3].

### Wavelets

In Hinblick auf adaptive Algorithmen spielen Wavelets oft eine wichtige Rolle, da durch einfache Hinzunahme von Wavelets problemlos wohl lokalisierte Details zur aktuellen Approximation der Lösung hinzugefügt werden können. Die Wavelet-BEM basiert im Prinzip auf einer kompakt getragenen Funktion  $\phi(x)$ , deren translatierte Dilatationen geschachtelte Approximationsräume über dem Intervall  $[0,1]$  definieren:

$$V_j = \text{span} \left\{ \phi_{j,k} := \frac{\phi(2^j x - k)}{2^{j/2}} : k = 0, \dots, 2^j - 1 \right\}, \quad (2)$$

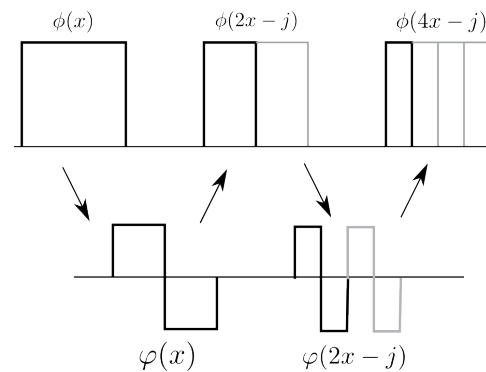
wobei  $j$  den Grad der "Feinheit" angibt. Basierend auf dieser Multiskalenanalyse  $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2$  können dann Waveleträume  $W_j$  definiert werden, sodass

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_{j+1} = \sum_{\ell=0}^{j+1} W_\ell, \quad W_0 = V_0. \quad (3)$$

Die Wavelets, die wiederum aus Dilatationen und Translationen einer festen Funktion  $\varphi(x)$  gebildet werden, bilden nun eine Basis dieser Komplementräume, d.h.

$$W_{j+1} = \text{span} \left\{ \varphi_{j,k} := \frac{\varphi(2^j x - k)}{2^{j/2}}, k = 0, \dots, 2^j - 1 \right\}. \quad (4)$$

Beginnend mit einer "groben" Darstellung werden der Approximation der Lösung daher sukzessive immer feinere Details hinzugefügt (siehe Abb. 1 für ein einfaches Beispiel mittels Haar-Wavelets).



**Abbildung 1:** Haar Wavelets. Oben: Funktionen der Einskalenbasis, welche die Räume  $V_j$  aufspannen. Unten: zugehörige Wavelets  $\varphi_{j,k}$ .

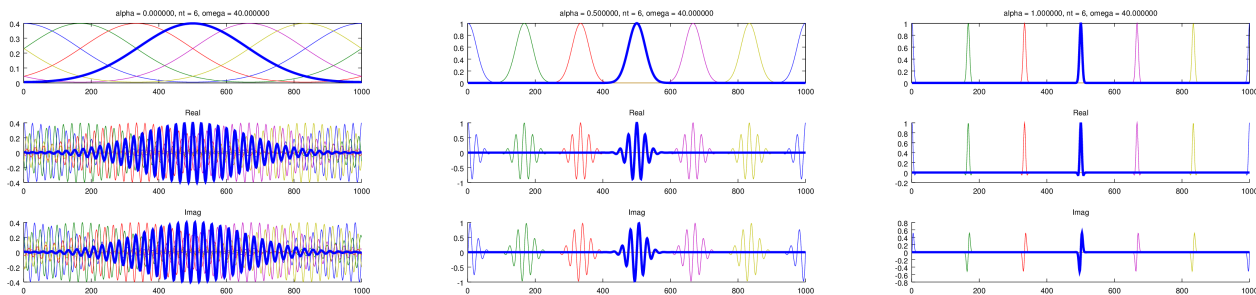
In der Wavelet-BEM können Wavelets zuerst auf dem Einheitsquadrat mittels Tensorprodukt generiert und dann mittels affiner Abbildung auf ein Viereckgitter des Objekts transferiert werden. Zudem ermöglichen gewisse analytische Eigenschaften der Wavelets, bzw. ihrer generierenden Funktion (Biorthogonalität, Vanishing Moments, kompakter Träger) eine effiziente Komprimierung der Helmholtz-Stifheitsmatrix [5].

Während Wavelets also geeignet sind, geometrische Unstetigkeiten effizient aufzulösen, haben sie jedoch bei periodische Komponenten einer Lösung Probleme.

### Frames

Das Konzept von Frames hat in den letzten Jahren in der Signalverarbeitung immer größere Verbreitung gefunden. Dabei handelt es sich um abzählbare Familien von Funktionen  $\{\psi_j\}$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$ , für die es zwei Konstanten  $A, B > 0$  gibt, sodass

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (5)$$



**Abbildung 2:** Beispiel für  $\alpha$ -modulation Frame Funktionen für  $\alpha \in \{0, 0.5, 1\}$  und  $\omega = 40$  mit je 6 Translationen. Als erzeugendes Fenster wurde eine periodisierte Gaussfunktion mit  $\sigma = 1$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  verwendet.

Weiter existiert für jeden Frame  $\{\psi_j\}$  mindestens ein dualer Frame  $\{\tilde{\psi}_j\}$ , sodass jede Funktion aus  $\mathcal{H}$  durch diese Frames dargestellt werden kann:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_j \rangle \psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \tilde{\psi}_j \quad (6)$$

(unbedingte Konvergenz). Die Frames (und ihre dualen) bilden somit ein erzeugendes System des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  und verallgemeinern damit den Begriff der Basis.

Gegenüber einer Basis liegt der Vorteil eines Frames in der Redundanz der Darstellung, die eine leichtere und flexiblere Konstruktion für erzeugenden Systeme mit speziellen Eigenschaften bietet. So ermöglichen Frames beispielsweise eine Darstellung eines Signals, die in Zeit und Frequenz konzentriert werden kann, was mit einer Basis nicht möglich ist. Natürlich bringt diese Redundanz auch Nachteile mit sich: Es ist zum Beispiel nicht mehr so einfach möglich, unbekannte Framekoeffizienten mit Hilfe eines einfachen linearen Gleichungssystems zu bestimmen. In vielen Fällen sind daher Verfahren wie die Landweber-Iteration oder NESTA [2] zur Bestimmung der unbekanntenen Framekoeffizienten notwendig.

Ein wichtiges Beispiel für einen Frame sind so genannte Gabor Frames. Sie werden durch Modulation und Translation einer festen Fensterfunktion  $\psi(x)$  konstruiert,

$$\psi_{a,b}(x) = \psi(x - b)e^{ibx}, \quad (7)$$

und sind eng mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation

$$S(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - \tau)e^{i\omega t} dt \quad (8)$$

verknüpft. Dabei wird ein Signal  $s(t)$  zunächst mit einer Funktion  $g(t)$  lokal rund um einen Zeitpunkt  $\tau$  "gefenstert" und anschließend Fourier transformiert. Auf diese Weise ist es möglich, eine Zeit-Frequenz-Darstellung des Signals zu ermitteln.

Gabor Frames sind also hervorragend geeignet, periodische Komponenten einer Lösung aufzulösen, zeigen andererseits aber Schwächen bei Unstetigkeiten bzw. Singularitäten.

## $\alpha$ -modulation Frames

Die Motivation für die Verwendung von  $\alpha$ -modulation Frames ist der Wunsch sowohl geometrische Singularitäten als auch periodische Komponenten effizient aufzulösen. Dies gelingt durch die Kombination von Wavelet- und Gabor Frame-Eigenschaften in einem gemeinsamen erzeugenden System. Tatsächlich kann gezeigt werden [8], dass es möglich ist, solche Frames durch Dilatation, Modulation und Translation geeigneter Fensterfunktionen  $\psi(x)$  zu generieren:

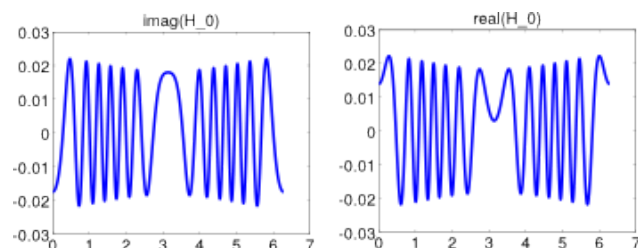
$$\psi_{\omega,b}(x) = (1 + |\omega|)^{\alpha/2} \psi((1 + |\omega|)^{\alpha}(x - b)) e^{i\omega(x-b)}. \quad (9)$$

Der Parameter  $\alpha \in [0, 1]$  beeinflusst hierbei die Eigenschaften des kombinierten Frames. Für  $\alpha \rightarrow 0$  reduziert sich das System auf einen Gabor Frame, wohingegen für  $\alpha \rightarrow 1$  die Wavelet-Eigenschaften dominieren.

In Abb.2 sind beispielhaft Framefunktionen für verschiedene  $\alpha$  dargestellt. In allen drei Fällen wird als generierende Funktion eine im Intervall  $[0, 2\pi]$  periodisierte Gaussfunktion mit Varianz  $\sigma = 1$  verwendet. Wie man leicht sehen kann, werden die Funktionen mit wachsendem  $\alpha$  immer stärker lokalisiert, während die Modulation (lokal) abnimmt.

## Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir demonstrieren, in wie weit sich Funktionen mittels  $\alpha$ -modulation Frames effizient darstellen lassen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Hankelfunktion  $H_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|)$  auf einer Ellipse um den Ursprung mit Achsen  $a = 1.0$  und  $b = 0.8$  (siehe Abb. 3). Die "Quelle"  $\mathbf{x}^*$  befindet sich in  $\mathbf{x}^* = (5, 0)$ . Als generierendes Fenster wird wieder die im Intervall  $[0, 2\pi]$  periodisierte Gaussfunktion mit  $\sigma = 1$  verwendet.



**Abbildung 3:** Hankelfunktion  $H_0$  auf der Ellipse bei  $k = 20$

In Abb. 4 betrachten wir den relativen Fehler, der durch die Darstellung der Hankelfunktion mittels Frame Elementen für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$  entsteht.

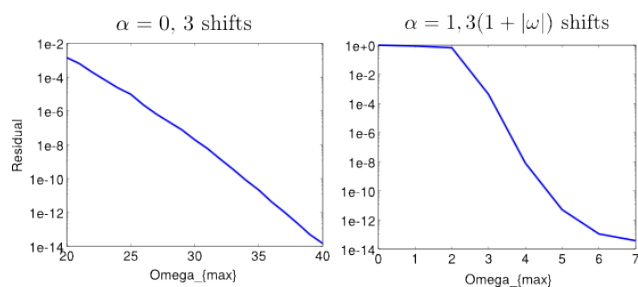
Für  $\alpha = 0$  wird eine fixe Anzahl von 3 Translationen pro Frequenz angenommen und das erzeugende System für

$$\omega = -\omega_{\max} + j, \quad j = 0, \dots, 2\omega_{\max}$$

gebildet. Eine einfache Anwendung des Backslash-Operators in MATLAB mit 6000 Sample-Punkten zeigt, dass der Fehler für  $\omega_{\max} = 40$  (was einer Anzahl von  $n = 3 \cdot 81 = 243$  Ansatzfunktionen entspricht) bereits im Rundungsfehlerbereich liegt.

Da für  $\alpha = 1$  der Träger der Frame Elemente mit steigendem  $\omega$  kleiner wird, wurde hier die Anzahl der Translationen als  $m = (1 + |\omega|)$  angesetzt. Wie aus Abb. 4 ersichtlich ist, wird in diesem Fall ein Fehler im Bereich von  $10^{-14}$  für  $\omega_{\max} = 7$  erreicht. Mit der von  $\omega$  abhängigen Anzahl von Translationen ergibt das ca. 220 Ansatzfunktionen.

Zum Vergleich: Für eine "reguläre" Basis mit 200 linearen Ansatzfunktionen (ca. 10 Elemente pro Wellenlänge) würde der relative Fehler nur im Bereich von  $10^{-2}$  liegen.  $\alpha$ -modulation Frames bieten somit großes Potential zur Darstellung von Lösungen der Helmholtzgleichung.



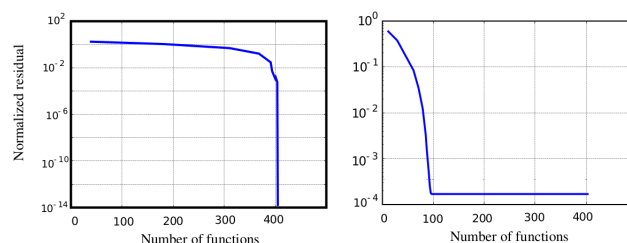
**Abbildung 4:** Fehler bei der Darstellung der Hankelfunktion auf der Ellipse mittels  $\alpha$ -modulation Frame Funktionen. Links: relativer Fehler für  $\alpha = 0$  und 3 Translationsschritten pro Frequenz als Funktion von  $\omega_{\max}$ . Rechts: relativer Fehler für  $\alpha = 1$  mit von  $\omega$  abhängigen Translationsschritten.

## $\ell_1$ -Minimierung

Für Abb. 4 wurden die Frame-Koeffizienten mittels des Backslash-Operators in MATLAB berechnet. Dabei wird die Redundanz der Frame-Darstellung jedoch nicht unbedingt berücksichtigt. So kann zum Beispiel auch bei Verwendung nur jeder zweiten Frequenz der Approximationsfehler noch immer sehr klein gehalten werden. Um die Anzahl der zu verwendenden Frame-Koeffizienten gering zu halten, empfiehlt es sich, Verfahren wie Landweber-Iteration oder NESTA zu verwenden, da diese die Methode der kleinsten Quadrate mit einer  $\ell_1$ -Nebenbedingung verknüpfen.

Wie wir in Abb. 4 gesehen haben, benötigen wir im Fall  $\alpha = 0$  eine maximale Frequenz von  $\omega_{\max} = 40$ , damit der relative Approximationsfehler im Rundungsfehlerbereich liegt. Es ist jedoch bisher nicht unbedingt klar, wie viele Frame Elemente wirklich notwendig sind, um einen kleinen Fehler zu garantieren. In Abb. 5 vergleichen

wir daher den relativen Approximationsfehler als Funktion der Anzahl verwendeter Frame Funktionen für den Backslash-Operator in MATLAB (links) mit den Ergebnissen der Landweber-Iteration (rechts). In beiden Fällen wurden  $\omega_{\max} = 40$  und 5 Translationsschritte angenommen. Aus den Ergebnissen für die Landweber-Iteration ist klar ersichtlich, dass für unser Beispiel bereits 100 Ansatzfunktionen ausreichen, um einen akzeptablen Approximationsfehler zu erzielen.



**Abbildung 5:** Approximationsfehler als Funktion der verwendeten Framefunktionen. Die Frame-Koeffizienten wurden dabei mittels des Backslash-Operators in MATLAB (links) bzw. mit einer Landweber-Iteration (rechts) berechnet. In beiden Fällen wurde  $\alpha = 0$ ,  $\omega_{\max} = 40$  und 5 Translationen pro Frequenz angenommen.

## Zusammenfassung

Während Wavelets Unstetigkeiten effizient auflösen können, besitzen Gabor Frames die Eigenschaft periodische Komponenten einer Lösung gut aufzulösen. Als Mischung beider Konzepte bieten  $\alpha$ -modulation Frames ein großes Potential als Ansatzfunktionen für (adaptive) numerische Verfahren zur Lösung der Helmholtzgleichung. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass herkömmliche Lösungsmethoden nicht mehr verwendet werden können. Es wird vorgeschlagen, stattdessen  $\ell_1$ -Optimierungsmethoden zu verwenden.

## Danksagung

Diese Arbeit wurde im Zuge des FWF-Projekts: BIOTOP, Adaptive Wavelet and Frame techniques for acoustic BEM (I-1018-N25) durchgeführt.

## Literatur

- [1] Aurada, M., Ferraz-Leite, S., Praetorius, D.: Estimator reduction and convergence of adaptive BEM, Applied Numerical Mathematics 62(6) (2012), 787-801
- [2] Necker, S., Bobin, J., Candes, E.: NESTA: A Fast and Accurate First-order Method for Sparse Recovery, SIAM J. Imaging Sci., 4 (2011), 1-39
- [3] Gantumur, T., Harbrecht H., Stevenson, R.: An optimal adaptive wavelet method without coarsening of the iterands, Mathematics of Computation 76(258) (2007), 615-630
- [4] Gaul, L., Kögl, M., Wagner, M.: Boundary Element Methods for Engineers and Scientists. An Introduc-

- tory Course with Advanced Topics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003
- [5] Harbrecht, H., Schneider, R.: Wavelet Galerkin schemes for boundary integral equations. Implementation and quadrature, *SIAM Journal on Scientific Computing* 27(4) (2006), 1347-1370
  - [6] Marburg, S.: Six boundary elements per wavelength: is that enough?, *Journal of Computational Acoustics* 10 (2002), 25-51.
  - [7] Sauter, S., Schwab, C.: Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen. Teubner Verlag, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2004
  - [8] Speckbacher, M., Bayer, D., Dahlke, S., Balazs, P.: The  $\alpha$ -Modulation Transform: Admissibility, Coorbit Theory and Frames of Compactly Supported Functions, arXiv:1603.00324