

# Berechnung hysteretischer Elemente ohne elastische Rückstellkraft

Holger Waubke<sup>1</sup>, Christian Kasess<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut für Schallforschung, ÖAW, A-1040 Wien, E-Mail: holger.waubke@oeaw.ac.at

<sup>2</sup> Institut für Schallforschung, ÖAW, A-1040 Wien, E-Mail: christian.kasess@oeaw.ac.at

## Einleitung

Zur Beschreibung des Verhaltens eines hysteretischen Systems mit einem Freiheitsgrad unter Rauschanregung ist die Monte-Carlo-Methode ein universell anwendbarer Ansatz. Im Gegensatz dazu stellt die Suche nach weitgehend analytischen Lösungen ein komplexes Problem dar. Für weißes Gaußsches Rauschen sind hier die Ito Gleichung [3] und die Kolmogorov Gleichung [4] zwei wichtige Schritte auf dem Weg zur Bestimmung analytischer Lösungen.

Ein einfaches Modell für die Beschreibung hysteretischen Verhaltens stammt von Bouc [1]. Das Modell wurde von Wen [9,10] erweitert. Für beide Modelle lässt sich die Ito Gleichung und die Kolmogorov Gleichung analytisch aufstellen, aber nicht analytisch lösen.

Eine Näherungslösung lässt sich direkt auf Basis der Ito Gleichung aufstellen [2]. In dieser Näherungslösung werden die statistischen Momente des transienten Vorgangs bestimmt. Die Näherung selbst ist erforderlich, da für die meisten nichtlinearen Systeme stets mehr unbekannte Momente benötigt werden als Gleichungen für die Bestimmung vorliegen. Im hier verwendeten Fall wird die Gaussian Closure [7,8,11] verwendet, bei der davon ausgegangen wird, dass die Verteilung der Zustandsgrößen eine multivariate Gauß-Verteilung ist. Unter dieser Einschränkung lassen sich für das Bouc Modell die Momenten-Gleichungen analytisch herleiten, so dass nur noch ein explizites Zeitschrittverfahren für die Bestimmung der zeitlichen Veränderung der Momente benötigt wird.

Ein anderer weit verbreiteter Zugang zu dem Problem stellt die Statistical Linearization und Non-Linearization [5,6,11] dar. Allerdings sind diese Methoden nicht in der Lage den transienten Vorgang zu beschreiben. Da das Bouc-Modell ohne elastische Rückstellkraft driften kann, sind diese Methoden für den zu untersuchenden Fall eines hysteretischen Systems ohne elastische Rückstellkraft mit einer zeitlich veränderlichen Belastung ungeeignet.

Um den Fehler, der bei der Annahme von Gauß-verteiltern Zufallsgrößen gemacht wird abschätzen zu können werden Monte-Carlo Simulationen durchgeführt. Die Realisationen werden mittels einer expliziten Zeitschrittmethode ausgehend von der Ito Gleichung bestimmt.

## Gaussian Closure für das Modell von Bouc

Einen Ein-Freiheitsgrad-Schwinger mit dem vom Bouc beschriebenen hysteretischen Verhalten lässt sich in die von Ito beschriebene Form bringen, wenn man neben der Knotenverformung  $x(t)$  auch die Knotengeschwindigkeit  $y(t)$  und eine zur hysteretischen Rückstellkraft äquivalente Verformung  $z(t)$  einführt [7,8] (Gleichung 1).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\frac{1}{m} \left\{ cy(t) + \alpha kx(t) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \alpha)k(z(t) - z_0) - \xi(t)w(t) \right\} \\ \dot{z}(t) &= Ay(t) - y(t)z(t)[\gamma \operatorname{sgn}(y(t)) + \theta \operatorname{sgn}(z(t))] \end{aligned} \quad (1)$$

Im Folgenden werden alle Größen dimensionslos verwendet, um die Aussagen allgemein halten zu können. In Gleichung 1 ist  $m=1,0$  die Masse,  $c=0,1$  die Dämpfung und  $k=1,0$  die Federsteifigkeit des Ein-Freiheitsgrad-Schwingers. Der Parameter  $\alpha=0,0$  wird benötigt um einen Übergang von elastischer zur hysteretischer Rückstellkraft zu ermöglichen. Im Weiteren sollen Fälle ohne elastische Rückstellkraft untersucht werden. Eine konstante Belastung des Systems, welche zum Zeitpunkt  $t=0$  einsetzt, wird mittels des Parameters  $z_0$  berücksichtigt.  $\xi(t)$  ist ein Gaußsches weißes Rauschen, das auf das System einwirkt. Zusätzlich zu in [8] präsentierten Ergebnissen soll hier die Intensität des weißen Rauschens mittels eines Fensters  $w(t)$  zeitlich verändert werden. Die Veränderung erfolgt langsam, so dass zeitliche Ableitungen des Fensters vernachlässigt werden dürfen. Die Hysterese wird von Bouc mittels der Parameter  $A=1,0$ ,  $\gamma=0,9$ ,  $\theta=0,1$  variiert. Das Fenster  $w(t)$  wird wie folgt angesetzt:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi t}{t_1} \right) \right) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & t_1 < t < t_2 \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi(t_3 - t)}{t_3 - t_2} \right) \right) & t_2 \leq t \leq t_3 \\ 0 & t_3 < t \end{cases} \quad (2)$$

Mittels des von Caughey und Dienes [2] beschriebenen Algorithmus lässt sich die Ito Gleichung in eine Gleichung für die Momente umformen. Es entsteht dabei ein Satz nichtlinearer Gleichungen mit expliziten ersten Ableitungen nach der Zeit  $t$ .

$$\frac{\partial m_{a_1, a_2, a_3}(t_{i+1})}{\partial t} \cong \frac{m_{a_1, a_2, a_3}(i+1) - m_{a_1, a_2, a_3}(i)}{\Delta t_i} \quad (3)$$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad m_{a_1, a_2, a_3} = E[x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3}]$$

Diskretisiert man die Zeitableitungen (Gleichung 3) so erhält man eine Differenzengleichung (Gleichung 4). Durch das Fenster  $w(t)$  ergibt sich nun eine zeitabhängige Intensität des weißen Rauschens  $K(t) = KK w(t)^2$ . Die Integrale wurden analytisch mit MAPLE ausgewertet [8].

$$\begin{aligned}
m_{a_1, a_2, a_3}(i+1) &= \\
&= \left\{ a_1 m_{a_1-1, a_2+1, a_3}(i) - \frac{c}{m} a_2 m_{a_1, a_2, a_3}(i) - \right. \\
&\quad - \frac{k\alpha}{m} a_2 m_{a_1+1, a_2-1, a_3}(i) - \frac{k(1-\alpha)}{m} a_2 m_{a_1, a_2-1, a_3+1}(i) + \\
&\quad + \frac{k(1-\alpha)z_0}{m} a_2 m_{a_1, a_2-1, a_3}(i) + A a_3 m_{a_1, a_2+1, a_3-1}(i) - \\
&\quad - \gamma a_3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{a_1} y^{a_2+1} z^{a_3} \operatorname{sgn}(y) p(x, y, z, t) dx dy dz - \\
&\quad - \theta a_3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{a_1} y^{a_2+1} z^{a_3} \operatorname{sgn}(z) p(x, y, z, t) dx dy dz + \\
&\quad \left. + \frac{K(t)}{2m^2} a_2 (a_2 - 1) m_{a_1, a_2-2, a_3}(i) \right\} \Delta t_i + m_{a_1, a_2, a_3}(i)
\end{aligned} \tag{4}$$

## Ergebnisse

Im Folgenden wird die Intensität des Rauschens fest auf  $KK=0,1$  gesetzt, um den Einfluss einer größer werdenden konstanten Belastung  $z_0=[0,0, 0,1, 0,3, 0,5]$  untersuchen zu können. Die Zeiten für das Fenster  $w(t)$  werden wie folgt angenommen  $t_1=1,0, t_2=2,0, t_3=3,0$ . Diese Zeiten sind kurz bezogen auf die Eigenschwingzeit des linear-elastischen Systems ( $\alpha=1,0$ ) von 6,3.

Um die Genauigkeit der Näherung überprüfen zu können werden die Ergebnisse der Gaussian Closure mit Monte-Carlo Simulationen verglichen. Die Monte-Carlo Simulationen verwenden ein explizites Zeitschrittverfahren auf Basis der Ito Gleichung, wobei 100.000 Realisationen berechnet werden. In beiden Verfahren wird ein Zeitschritt von  $10^{-4}$  angewendet. Die Berechnung der Momente und die Ausgabe der Ergebnisse erfolgt in der Monte-Carlo Simulation alle 0,1 Einheiten. In selbigen Abständen werden auch die Momente der Gaussian Closure ausgegeben, da bei dieser Methode die Ausgabe sonst dominierend für die Rechenzeit wird. Die Rechenzeit für ein Beispiel benötigt auf einem 6-Core Xenon Rechner unter Verwendung des 64-bit GFORTRAN Compilers mit der Optimierungseinstellung O3 bei der Gaussian Closure im Mittel 0,3040 Sekunden. Die Monte-Carlo Methode benötigt für 100.000 Realisationen 3.100 Sekunden. Es benötigt somit die Gaussian Closure etwa die Zeit, innerhalb der bei der Monte-Carlo Simulation 10 Realisationen berechnet werden, was in etwa auch der zehnfachen Zeit einer deterministischen Berechnung entspricht.

Die Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation stimmen gut mit den Ergebnissen der Gaussian Closure Methode überein. Lediglich bei der Varianz der Verformung  $X$  zeigt sich eine Überschätzung bei großen  $z_0$  und eine Unterschätzung bei kleinem  $z_0$ . Man erkennt, dass für den Fall mit einer relativ kurzen Einwirkungszeit des Rauschens  $\xi$ , es trotzdem lange braucht, bevor die Varianz  $V(XX)$  stationäre Werte erreicht. Die Varianzen der Schnelle  $V(YY)$  und der zur hysteretischen Kraft proportionalen Verformung  $V(ZZ)$  konvergieren schneller, weshalb in den Abbildungen 1-4 diese Varianzen nicht bis 100, sondern nur bis 40 Zeiteinheiten dargestellt sind. Die Abweichungen bei der Varianz  $V(XX)$  lassen sich daraus erklären, dass das System keine elastische

Rückstellkraft besitzt und somit kleine Abweichungen in der Geschwindigkeit  $Y$  zu großen Abweichungen nach langer Simulationszeit führen.

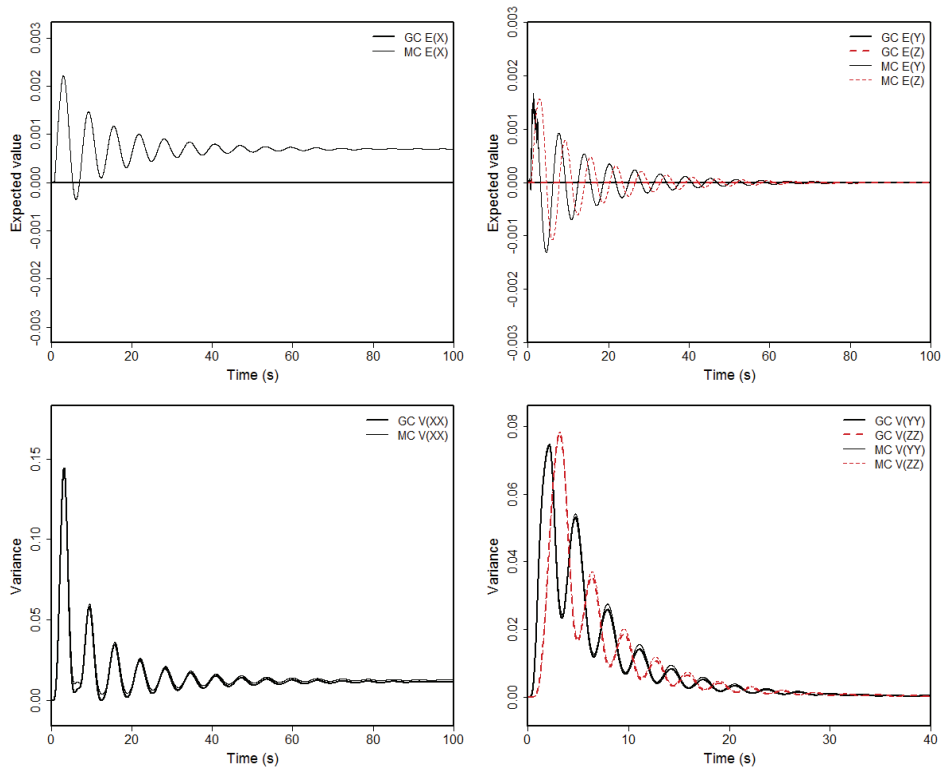
Ursächlich für die Abweichungen dürfte die Annahme einer Gaußverteilung für die hysteretische Kraft  $Z$  sein. In Wahrheit ist diese Verteilung auf das Intervall  $[-1,1]$  beschränkt. Hier wäre der Ansatz einer Verteilung auf diesem Intervall für große  $KK$  besser.

## Zusammenfassung

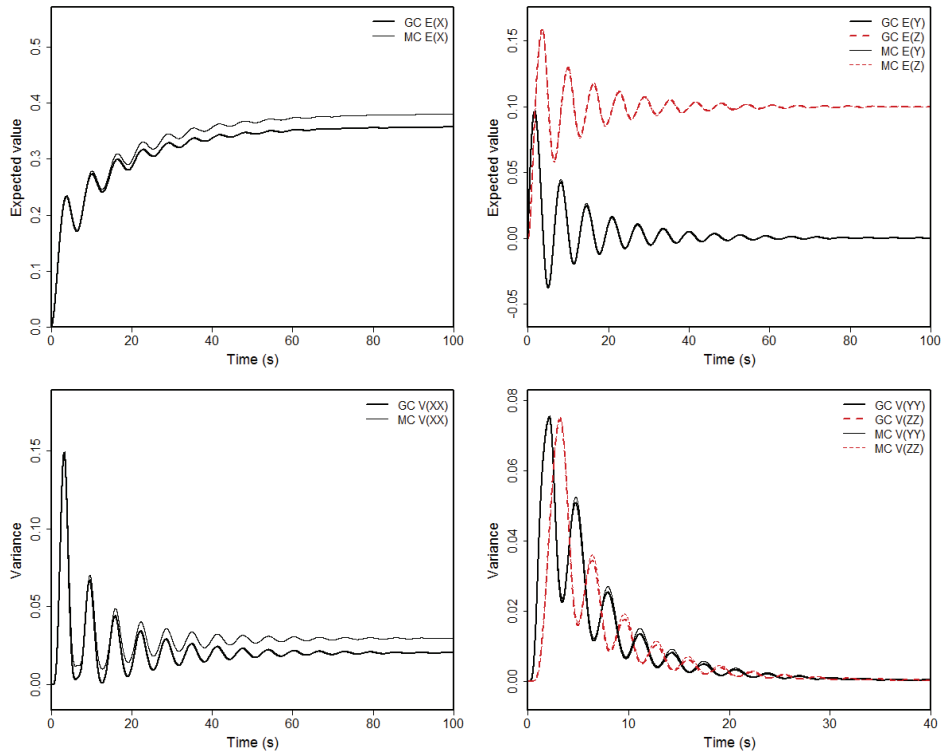
Es hat sich gezeigt, dass die Gaussian Closure eine Methode ist, um rasch die stochastische Antwort eines Systems mit Bouc Hysterese auf nichtstationäre Rauschanregungen auch ohne elastische Rückstellkraft zu bestimmen.

## Literatur

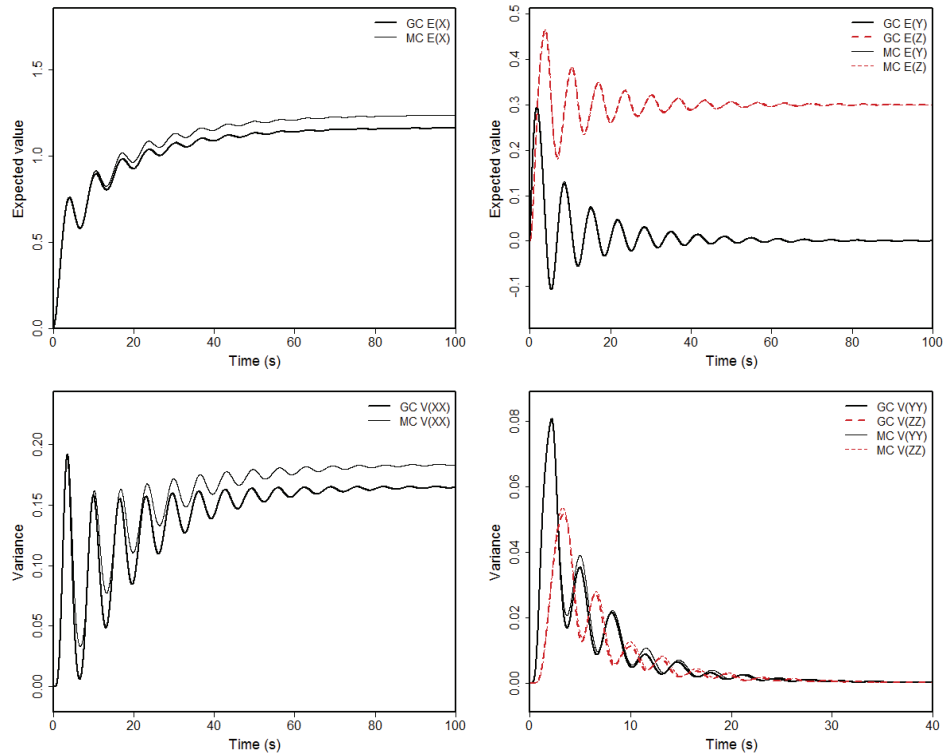
- [1] R. Bouc, Forced vibration of mechanical systems with hysteresis, Proceedings of the Fourth Conference on Non-linear Oscillation. Prague (1967) (abstract).
- [2] T.K. Caughey, J.K. Dienes, Analysis of a nonlinear first-order system with a white noise input, Journal of Applied Physics 33(11) (1961) 2476-2479.
- [3] K. Ito, Ito's stochastic calculus and probability theory, Tokyo, 1996.
- [4] A. Kolmogorov, Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Annalen 104 (1931) 415-458.
- [5] J.B. Roberts, P.D. Spanos, Random Vibration and Statistical linearization, Dover Publications Minela, New York, 2003.
- [6] P.D. Spanos, A. Giaralis, Third-order statistical linearization-based approach to derive equivalent linear properties of bilinear hysteretic systems for seismic response spectrum analysis, Structural Safety 44 (2013) 59-69.
- [7] H. Waubke, Moment-Closure Technik zur Abschätzung der elasto-plastischen Reaktion von Stockwerksrahmen auf zufällige Belastungen aus Windereignissen, Habilitation Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau. TU Muenchen 1/99 (1999).
- [8] H. Waubke, C. Kasess, Gaussian closure technique applied to the hysteretic Bouc model with non-zero mean white noise excitation, Journal of Sound and Vibration 382 (2016) 258-273.
- [9] Y.K. Wen, Method for random vibration of hysteretic systems, Journal of the Engineering Mechanics Division 102(2) (1976) 249-263.
- [10] Y.K. Wen, Comparison of Gaussian closure technique and equivalent linearization method, J. of Appl. Mech. ASME 47 (1980) 150-154.
- [11] W.-F. Wu, Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation, Probabilistic Engineering Mechanics 2(1) (1987) 2-8.



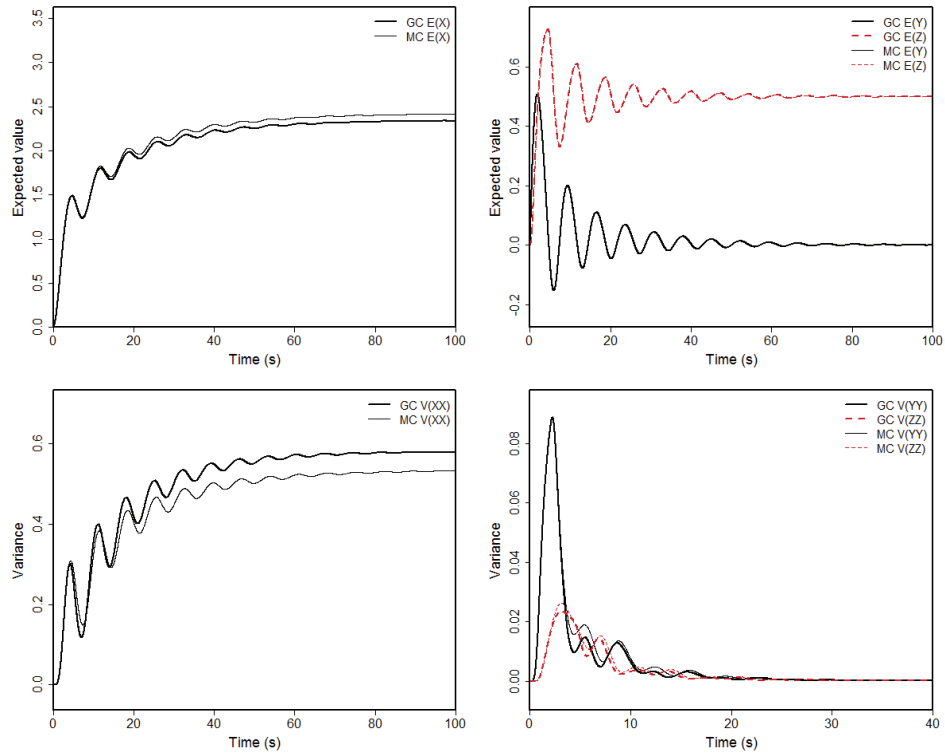
**Abbildung 1:** Vergleich der Mittelwerte  $E()$  und Varianzen  $V()$  der Knotenverformung  $X$ , der Knotengeschwindigkeit  $Y$  und der zur hysteretischen Kraft-proportionalen Verformung  $Z$  zwischen Gaussian Closure (GC) und Monte-Carlo (MC) Methode für  $z_0=0.0$  und  $KK=0,10$ .



**Abbildung 2:** Vergleich der Mittelwerte  $E()$  und Varianzen  $V()$  der Knotenverformung  $X$ , der Knotengeschwindigkeit  $Y$  und der zur hysteretischen Kraft-proportionalen Verformung  $Z$  zwischen Gaussian Closure (GC) und Monte-Carlo (MC) Methode für  $z_0=0.1$  und  $KK=0,10$ .



**Abbildung 3:** Vergleich der Mittelwerte  $E()$  und Varianzen  $V()$  der Knotenverformung  $X$ , der Knotengeschwindigkeit  $Y$  und der zur hysteretischen Kraft-proportionalen Verformung  $Z$  zwischen Gaussian Closure (GC) und Monte-Carlo (MC) Methode für  $z_0=0.3$  und  $KK=0.10$ .



**Abbildung 4:** Vergleich der Mittelwerte  $E()$  und Varianzen  $V()$  der Knotenverformung  $X$ , der Knotengeschwindigkeit  $Y$  und der zur hysteretischen Kraft-proportionalen Verformung  $Z$  zwischen Gaussian Closure (GC) und Monte-Carlo (MC) Methode für  $z_0=0.5$  und  $KK=0.10$ .