

Vergleich von 3D-Greenschen Funktionen für eine Halbraum-BEM-Implementierung

Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: piscoya@beuth-hochschule.de

1. Einleitung

Bei 3D-Halbraumproblemen im Frequenzbereich, bei denen der Boden durch eine endliche Impedanz gekennzeichnet ist, bietet eine BEM-Implementierung einen Vorteil gegenüber anderen Methoden, wenn die Greensche Funktion die Randbedingung am Boden erfüllt. Mit solcher angepassten Greenschen Funktion muss nur die Oberfläche der Strahler und der Streuobjekte diskretisiert werden. Für einen flachen Boden mit gleichmäßiger Impedanz existieren analytische Darstellungen der Greenschen Funktion nur für schallharte und schallweiche Böden. Für andere Arten von Impedanzen finden sich in der Literatur verschiedene Formeln. Um in einer BEM-Formulierung verwendet zu werden, müssen die Greensche Funktion und ihre ersten und zweiten Ableitungen regulär sein. Sollten Singularitäten auftreten, so müssen diese integrierbar sein. In der vorliegenden Arbeit werden vier derartige Formeln untersucht und deren Genauigkeit und Rechenzeit miteinander verglichen. Die Berechnungen werden für drei verschiedene Arten von Impedanzen durchgeführt: für absorbierende (rein reelle), massenartige (rein imaginäre und positive) und federartige (rein imaginäre und negative) Impedanzen.

2. Das Halbraum-Problem

Ein Körper, der sich über/auf einem unendlichen flachen Boden befindet, soll Schall abstrahlen bzw. den auftreffenden Schall streuen (siehe Abb. 1). Der Boden ist durch eine gleichmäßige, lokal reagierende Impedanz Z_G charakterisiert.

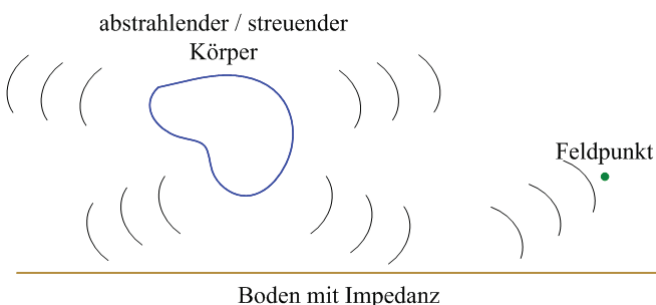


Abbildung 1: Halbraum-Problem.

Wenn der Schalldruck nur im Fernfeld von Interesse ist, kann man den Körper als eine kompakte Quelle betrachten. In diesem Fall ist der Schalldruck durch die Halbraum-Greenschen-Funktion gegeben. Wenn aber der Schalldruck auch im Nahfeld bestimmt werden soll, muss man die Wirkung des Körpers mitberücksichtigen. Zur Bestimmung des Nah- und Fernfeldes zeigt die Boundary-Element-Methode (BEM) Vorteile gegenüber anderen Methoden,

insbesondere weil: i) die Abstrahlbedingung erfüllt ist und ii) nur eine Oberflächen-Diskretisierung nötig ist.

3. Die Greensche Funktion eines Halbraumes mit Bodenimpedanz Z_G

Betrachtet werden ein Monopol in einer Höhe h über dem Boden mit Koordinaten $\vec{y} = (0, 0, h)$ und ein Feldpunkt $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (siehe Abb 2).

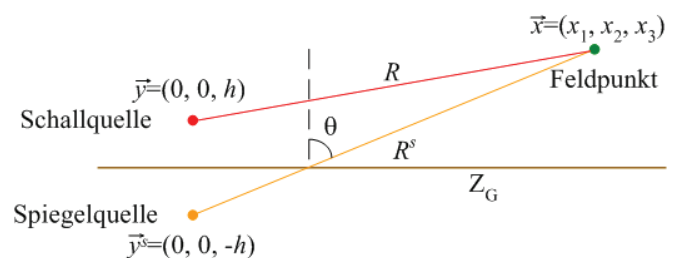


Abbildung 2: Positionen der Schallquelle und des Feldpunktes.

Die Greensche Funktion des Halbraumes mit Bodenimpedanz g^h kann als die Greensche Funktion der Halbraumes mit schallhartem Boden g_R^h zuzüglich eines Korrekturterms $C(\gamma)$ betrachtet werden:

$$g^h = g_R^h + C(\gamma), \tag{1}$$

wobei $\gamma = jk / Z_0$, $Z_0 = Z_G / \rho c$ und g_R^h den Beitrag von Schallquelle und Spiegelquelle enthält:

$$g^h = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} + \frac{e^{-jkR^s}}{4\pi R^s}. \tag{2}$$

Da die Greensche Funktion die Randbedingung auf dem Boden erfüllen muss, ergibt sich folgende Bedingung für den Korrekturterm:

$$\left[\frac{\partial C}{\partial n} - \gamma C \right]_{z=0} = \gamma g_R^h \Big|_{z=0}. \tag{3}$$

4. Darstellungen der Greenschen Funktion

Für eine BEM-Implementierung des Halbraum-Problems mit Bodenimpedanz soll eine Darstellung der Greenschen Funktion gewählt werden, die für alle Impedanzarten gültig ist. Darüber hinaus müssen die Funktion und ihre ersten und zweiten Ableitungen regulär sein. Singularitäten können vorkommen, z.B. wenn Feldpunkt und Quellposition an demselben Punkt auf dem Boden liegen. Dieser Fall tritt auf,

wenn der Körper auf dem Boden sitzt und die Lösung in den Knoten gesucht wird. Diese Situation kann aber vermieden werden, indem man a) den Körper leicht über den Böden erhebt oder b) die Kollokationspunkte in die Element-Mittelpunkte setzt (siehe Abb. 3). Wir haben die zweite Option gewählt.

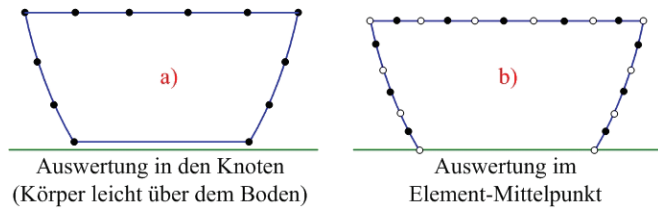


Abbildung 3: Fall, wenn Körper auf dem Boden sitzt.

In dieser Arbeit werden fünf Formeln des Korrekturtermes verglichen. Vier sind exakte Formeln und die Fünfte ist eine Annäherung. Die Formeln werden aufgeführt und die Referenzen angegeben. Details der Herleitung der Formeln sind in der jeweiligen Publikation zu finden. Es wird bestimmt, ob die Formeln numerisch stabil in allen untersuchten Fällen sind.

4.1 Formel mit komplexen Quellen

Anhand des Sommerfeldschen Ansatzes und durch Verwendung von Quellfunktionen mit komplexen Positionen, leitete Ochmann [1] eine Formel her, in der der Korrekturterm als Überlagerung von komplexen Monopolen interpretiert werden kann:

$$C(\gamma) = \frac{j\gamma}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+(x_3+h-j\eta)^2}} e^{j\eta\gamma}}{\sqrt{\rho^2+(x_3+h-j\eta)^2}} d\eta, \quad (4.a)$$

wobei $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$. Diese Formel konnte man schon in der Literatur finden, aber ohne eine klare Deutung. Der Ausdruck besitzt keine Singularität, außer wenn Feldpunkt und Quellposition an demselben Punkt auf dem Boden liegen. Für Feld- und Quellpositionen sehr nah am Boden und bei tiefen Frequenzen schwankt der Integrand stark.

4.2 Geschlossene Darstellungen

Ausgehend vom originalen Sommerfeld-Integral leiteten Koh & Yook [2] nach verschiedenen mathematischen Manipulationen zwei geschlossene Darstellungen her:

$$C(\gamma) = \frac{\gamma}{2} e^{\gamma(x_3+h)} \times \{Q_0(u, z)Y_0(z) + [P_0(u, z) - (\pm j)]J_0(z)\}, \quad (4.b)$$

wobei J_0 und Y_0 die Bessel- und Neumann-Funktionen und Q_0 und P_0 unvollständige Weber-Integrale nullter Ordnung sind, und

$$C(\gamma) = \frac{-j\gamma}{2} e^{\gamma(x_3+h)} \times \left\{ \pm J_0(z) + \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(z) - E_0^-(\omega, z)] \right\}, \quad (4.c)$$

wobei $H_0^{(1)}$ die Hankel-Funktion und E_0^- die unvollständige Zylinderfunktion der Poisson-Art nullter Ordnung sind.

4.3 Formel mit reflektierten ebenen Wellen

Durch die Zerlegung der Funktion einer Punktquelle in unendlich viele ebene Wellen leitete Ingard eine Formel für den reflektierten Schall her. Taraldsen [3] vereinfachte diese Formel zu:

$$C(\gamma) = -(1 - R_G) \int_0^\infty e^{-u} \left(1 - \frac{u}{\rho} + \frac{u^2}{4\tau^2} \right)^{-1/2} du \quad (4.d)$$

wobei R_G der Reflektionsfaktor einer ebenen Welle ist.

4.4 Angenäherte Formel

Die am meisten verwendete Annäherung ist die Weyl-van der Pol-Approximation. Die Formel wurde für akustische Probleme von Lawhead und Rudnick [4] hergeleitet. Sie ist gültig im Fernfeld, nämlich für $kR_2 \gg 1$ und für $|Z_0| \gg 1$:

$$C(\gamma) = -(1 - R_G) \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2} \sqrt{-\pi s} e^{-s} \operatorname{erfc}(\sqrt{-s}) \quad (4.e)$$

wobei erfc die komplementäre Fehlerfunktion ist.

5. Numerische Berechnungen

Für die Tests wird eine grob diskretisierte Kugeloberfläche S mit Radius 0.15m genommen. Das Modell hat 56 Elemente, deren Größe die 6-Punkte-pro-Wellenlänge-Regel bis 500 Hz erfüllt. Zwei Fälle werden berechnet: I) die Kugel ist 1 m über dem Boden und II) die Kugel sitzt auf dem Boden (siehe Abb. 4). Im Fall I wird die Fernfeld-Bedingung $kR_2 \gg 1$ erfüllt und im Fall II liegen Quellposition und Feldpunkt nah am Boden.

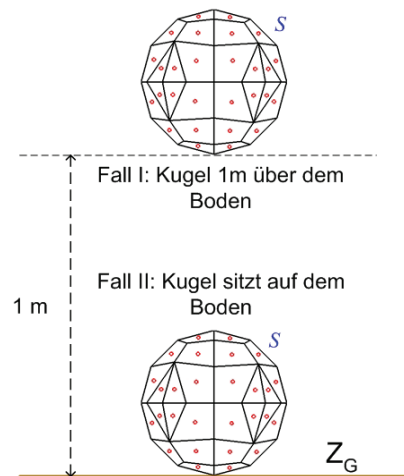


Abbildung 4: Lage der Kugel in den numerischen Experimenten.

Der Korrekturterm und seine ersten und zweiten Ableitungen ($C, \partial C / \partial n_y, \partial C / \partial n_x, \partial^2 C / \partial n_x \partial n_y$)

werden für jedes Punktepaar x und y auf der Kugeloberfläche bestimmt. Im jedem Fall werden drei Impedanzarten untersucht: i) Massencharakter; ii) Reibungscharakter und iii) Steifecharakter und für jede Impedanzart werden 10 Werte betrachtet: $|Z_0| = 0.1, 0.25, 0.5, 1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 100$, insgesamt werden also $5 \times 56 \times 56 \times 4 \times 10 \times 3 \times 2$ Werte berechnet.

Zur Bewertung der Leistung der Formeln wird (4.a) als Referenz genommen. Ein relativer Fehler ϵ_{nml}^k wird eingesetzt, um die Genauigkeit der Formeln zu bestimmen, mit

$$\epsilon_{nml}^k = \max_{i, \{x, y \in S\}} \left\{ \frac{|q_{nml}^{ik}(x, y) - q_{Rml}^{ik}(x, y)|}{|q_{Rml}^{ik}(x, y)|} \right\} \quad (5)$$

In (5) bezieht sich q auf den berechneten Wert, i auf die Art der Ableitung, n auf die Art der Formel (R :Referenz), m auf die Impedanzart, l auf den Impedanzwert und k auf die Lage der Kugel (siehe Abb. 4). Um den Rechenaufwand der Formeln zu bestimmen, wird das Verhältnis der Rechenzeiten τ_{nm}^k ermittelt.

$$\tau_{nm}^k = \frac{t_{nm}^k}{t_{Rm}^k}, \quad (6)$$

$$t_{nm}^k = \sum_{x, y, i, l} t_{nml}^{ik}(x, y), \quad t_{Rm}^k = \sum_{x, y, i, l} t_{Rml}^{ik}(x, y).$$

Ergebnisse

Tabellen 1 und 2 fassen die Bewertung der Genauigkeit in jedem Studienfall zusammen. Für die unterschiedlichen Fälle wird geprüft, bei welchen Impedanzwerten der relative Fehler unter 1% bleibt.

Tabelle 1: Fall I: Kugel 1 m über dem Boden

Impedanz-Art	(4.b)	(4.c)	(4.d)	(4.e)
Massen-Charakter	$ Z_0 \geq 5$	$ Z_0 \geq 2.5$	alle Werte	alle Werte
Reibungs-Charakter	$ Z_0 \geq 10$	$ Z_0 \geq 0.5$	alle Werte	alle Werte
Steife-Charakter	alle Werte	kein Wert	alle Werte	alle Werte

Tabelle 2: Fall II: Kugel sitzt auf dem Boden

Impedanz-Art	(4.b)	(4.c)	(4.d)	(4.e)
Massen-Charakter	$ Z_0 \geq 0.5$	$ Z_0 \geq 0.25$	alle Werte	kein Wert
Reibungs-Charakter	$ Z_0 \geq 0.25$	$ Z_0 \geq 0.25$	alle Werte	kein Wert
Steife-Charakter	alle Werte	kein Wert	$ Z_0 \geq 10$	kein Wert

Aus den Tabellen 1 und 2 ergibt sich, dass Formel (4.b) genaue Ergebnisse bei allen Impedanzwerten nur im Falle des Steifecharakters liefert, für die anderen Impedanzarten nur bei gewissen Werten. Formel (4.c) ist dagegen nicht genau für Impedanzen mit Steifecharakter, für die anderen Impedanztypen nur bei bestimmten Werten. Formel (4.d) zeigt Probleme für Böden mit Steifecharakter, aber nur, wenn Quell- und Feldpunkt nah am Boden liegen. Formel (4.e) ist genau, wenn der Abstand zwischen Spiegelquelle und Feldpunkt groß genug ist ($kR_2 \gg 1$), wie das in Tabelle 1 der Fall ist.

Tabellen 3 und 4 präsentieren die relativen Rechenzeiten beider Studienfälle.

Tabelle 3: Fall I: Kugel 1 m über dem Boden

Impedanz-Art	(4.b)	(4.c)	(4.d)	(4.e)
Massen-Charakter	1.39	0.18	0.48	0.0015
Reibungs-Charakter	3.33	0.96	0.84	0.0024
Steife-Charakter	0.48	-	0.48	0.0014

Tabelle 4: Fall II: Kugel sitzt auf dem Boden

Impedanz-Art	(4.b)	(4.c)	(4.d)	(4.e)
Massen-Charakter	1.02	0.17	0.48	-
Reibungs-Charakter	1.71	0.26	0.77	-
Steife-Charakter	0.58	-	1.13	-

Mit der Formel (4.b) wird Rechenzeit gespart nur im Falle von Steifecharakter, während Formel (4.c) schneller ist als (4.a) für Massen- und Reibungscharakter. Formel (4.d) ist langsamer als die Referenz, wenn der Boden eine Impedanz mit Steifecharakter hat und der Körper auf dem Boden sitzt. Die angenäherte Lösung (4.e) ist wie erwartet viel schneller als alle exakten Formeln, wenn sie genaue Ergebnisse liefert.

Mehr Details zur vorliegenden Arbeit findet man in [5].

Fazit

Die Studie zeigt, dass nur Formel (4.a) numerisch stabil für alle Impedanzarten ist, aber sie kann rechnerisch aufwändig sein. Die anderen Formeln können schneller sein, aber die Genauigkeit hängt von verschiedenen Faktoren ab wie Impedanzart, Impedanzwert oder Lage des Körpers. Eine genaue und schnelle BEM-Implementierung könnte dadurch erreicht werden, dass die Formeln in geschickter Weise kombiniert werden.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch die DFG im Rahmen des Projektes "Theorie und Anwendung akustischer Multipolstrahler mit komplexen Singularitäten" gefördert.

Literatur

- [1] Ochmann M.: The complex equivalent source method for sound propagation over an impedance plane, *J. Acoust. Soc. Am.* 116(6) (2004), 3304-3311.
- [2] Koh I.S., Yook J.G.: Exact Closed-Form Expression of a Sommerfeld Integral for the Impedance Plane Problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 54(9) (2006), 2568-2576.
- [3] Taraldsen G.: The complex image method. *Wave Motion*, 43 (2005), 91–97.
- [4] Lawhead R.B., Rudnick I.: Acoustic wave propagation along a constant normal impedance boundary, *J. Acoust. Soc. Am.* 23(5) (1951), 546-549.
- [5] Piscoya R., Ochmann M.: Acoustical Green's function and boundary element techniques for 3D half-space problems, angenommen zur Veröffentlichung im *Journal of Computational Acoustics*.