

Effiziente BEM-Simulation von absorbierenden Schichtsystemen

Paul Reiter^{1,2}, Harald Ziegelwanger¹

¹ AIT Austrian Institute of Technology GmbH, Center for Mobility Systems, 1210 Wien, Österreich

² TU Wien, Institut für Angewandte Physik, 1040 Wien, Österreich

Einleitung

Homogene akustische Absorber wie zB. Steinwolle oder Kunststoffschäume sind das wichtigste Werkzeug zur Schallabsorption. Dafür wird normalerweise eine Schichtanordnung aus ein oder mehreren Absorbern vor einer voll reflektierenden Rückseite angebracht, wobei die Geometrie an den entsprechenden Anwendungsfall angepasst werden kann. Beispielsweise kann ein Luftspalt hinter dem Absorber die Absorption für tiefe Frequenzen verbessern, während ein Schichtsystem aus mehreren Absorbern die Absorption bei hohen Frequenzen verbessern kann.

Die Charakterisierung eines absorbierenden Systems geschieht üblicherweise über dessen Oberflächenadmittanz, welche mit Hilfe der Transfermatrixmethode [1] berechnet, oder mit Hilfe eines Impedanzrohres gemessen werden kann. Diese Oberflächenadmittanz kann dann in umfassenderen FEM (Finite Elemente Methode)/BEM (Randelementmethode) Simulationen als Randbedingung verwendet werden. Diese Herangehensweise stellt allerdings eine Vereinfachung gegenüber der echten Berücksichtigung des Schichtsystems in der Simulation dar, da die Oberflächenadmittanz nur in Normalrichtung für einfallende ebene Wellen gültig ist. Um also das reflektierte Schallfeld zB. einer Kugelwelle zu berechnen ist die Simulation der Schallausbreitung im Absorber notwendig. Dafür kann aus den wichtigsten drei Parametern zur Charakterisierung von akustischen Absorbern (der spezifische Strömungswiderstand Ξ , die Porosität σ und der Strukturfaktor κ [2], [3]) eine komplexe Wellenzahl berechnet werden, die eine exponentielle Dämpfung im Absorber verursacht.

In dieser Arbeit wird eine BEM vorgestellt, mit der das Schallfeld in und vor einem absorbierendes Schichtsystem berechnet werden kann. Dafür werden die Grenzflächen zwischen den einzelnen Absorber- oder Luftschichten diskretisiert und jede Schicht als eigenes BEM Gebiet gehandhabt. Die BEM Matrizen jeder einzelnen Schicht werden dann mit Kopplungsmatrizen, die die Grenzschichtbedingungen enthalten, kombiniert und in einer Matrix für das gesamte Problem zusammengefasst. Um den Rechenaufwand zu minimieren wird das Problem axialsymmetrisch [4] angenommen, wodurch die Oberflächenelemente eine Ringform annehmen. Das übliche Problem der singulären Integrale in der BEM wird hier durch eine Koordinatentransformation gelöst, die außerdem die analytische Lösung der Radialkomponente aller BEM Integrale ermöglicht. Das Ergebnis ist eine sehr effiziente BEM, dessen Ergebnis als eine numerische Halbraum Green's Funktion interpretiert werden kann.

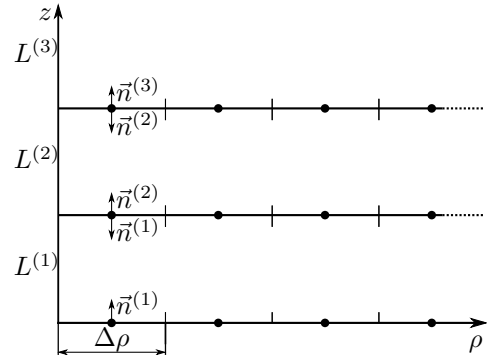


Abbildung 1: Vorderansicht: Visualisierung der einzelnen Schichten übereinander, deren Kollokationspunkte und Normalvektoren. ρ ist die Radiusrichtung in der x-y Ebene.

Geometrie des Problems

In den Abbildungen Abb. 1 (Vorderansicht) und Abb. 2 (Draufsicht) ist die Geometrie des Problems dargestellt. Sie besteht aus mehreren Schichten $L^{(n)}$ übereinander in z-Richtung, getrennt durch in Ringelemente zerlegte Grenzschichten. Eine Schicht kann, wie $L^{(3)}$ auch eine unendliche Ausdehnung mit nur einer Grenzfläche haben. Die Breite eines Ringelements ist $\Delta\rho$ und die Kollokationspunkte befinden sich o.b.d.a. auf der x-Achse immer in der Mitte eines jeden Elements. Jede Grenzfläche hat eine unendliche Ausdehnung und somit eine unendliche Anzahl an Ringelementen. In der Praxis reicht es jedoch aus eine beschränkte Zahl N an Ringelementen zu berücksichtigen um in der Nähe der Rotationsachse eine genaue Lösung zu erhalten. Der Radius einer Grenzschicht ist dann $N\Delta\rho$.

BEM Formulierung

Der Ausgangspunkt ist eine direkte BEM Formulierung basierend auf der Kollokationsmethode. Diese gilt, für ein Volumen V , beschränkt durch eine geschlossene Fläche S , welche in Elemente s_j diskretisiert ist.

$$\alpha p(\vec{r}) \approx \sum_j \left(p_j \int_{s_j} \vec{H}(\vec{r}, \vec{r}') d^2 s' + (\nabla_n p)_j \int_{s_j} G(\vec{r}, \vec{r}') d^2 s' \right) + p_{\text{inc}}(\vec{r}) \quad (1)$$

mit $\alpha = 1, 1/2, 0$ je nachdem ob sich \vec{r} in, auf der Oberfläche, oder außerhalb des Volumens V befindet. p_j und $(\nabla_n p)_j$ sind der Schalldruck und dessen Gradient auf dem Element s_j und $p_{\text{inc}}(\vec{r})$ ist der Quellterm. $G(\vec{r}, \vec{r}')$ bezeichnet die Greensche Funktion und $\vec{H}(\vec{r}, \vec{r}')$ dessen Gradienten. Mit der Einsteinschen Summenkonvention

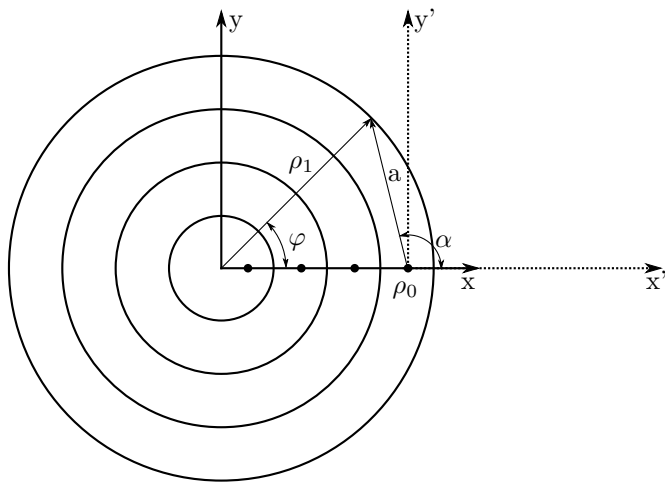


Abbildung 2: Draufsicht: Visualisierung der Ringelemente und der Koordinatentransformation $(x, y) \rightarrow (x', y')$ bzw. $(\rho, \varphi) \rightarrow (a, \alpha)$

und dem Kroneckerdelta $\delta_{i,j}$ lässt sich diese Gleichung als Gleichungssystem für alle Elemente s_j schreiben.

$$(H_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad G_{ij}) \begin{pmatrix} p_j \\ (\nabla_n p)_j \end{pmatrix} = (-p_{inc,i}) \quad (2)$$

Alle Schichtmatrizen $m = (H_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad G_{ij})$ werden dann in einem Gleichungssystem zusammengefasst und mit Kopplungsmatrizen c_A und $c_{1,2}$ kombiniert. Die Kopplungsmatrizen $(c_{1,2})$ enthalten die Grenzschichtbedingungen zwischen den Schichten bzw. die Kopplung mit dem Boden (c_A) unterhalb der Schichten.

$$\begin{pmatrix} [c_A] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [m_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [& c_{1,2} &] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [& c_{2,3} &] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [m_3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j^{(1)} \\ (\nabla_n p)_j^{(1)} \\ p_j^{(2)} \\ (\nabla_n p)_j^{(2)} \\ p_j^{(3)} \\ (\nabla_n p)_j^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_{inc,j}^{(1)} \\ 0 \\ -p_{inc,j}^{(2)} \\ 0 \\ -p_{inc,j}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Um die Matrixelemente $G_{i,j}$ und $H_{i,j}$ zu bestimmen müssen Integrale über die Ringelemente gelöst werden, welche jedoch singulär werden können. Um die Singularitäten zu umgehen, wurde eine Koordinatentransformation durchgeführt (Abb. 2). Nach der Koordinatentransformation hebt die Funktionaldeterminante die Singularität und die Lösung des Radialanteils ist analytisch möglich. Es bleibt nur noch ein Winkelanteil, der mit gewöhnlicher Gauß-Quadratur gelöst wird.

Numerisches Beispiel

Um die vorgestellte Methode zu testen wurde eine Punktquelle über einem vollreflektierenden Boden platziert und das Ergebnis mit der analytischen Lösung, einer Spiegelschallquelle, verglichen. Das Resultat wird in Abb. 3 gezeigt.

In Abb. 3 ist ersichtlich, dass der Fehler in einer log-log Darstellung nahezu linear mit steigendem Radius $N\Delta\rho$

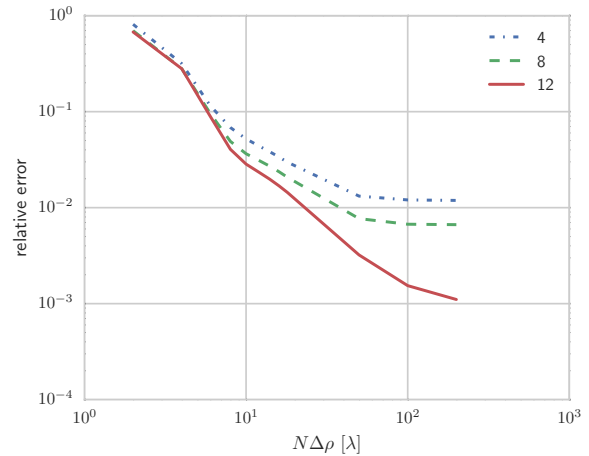


Abbildung 3: Relativer Fehler des reflektierten Schallfeldes auf der Symmetrieachse über einer Luftschicht mit der Dicke λ , verglichen mit der Lösung einer Spiegelschallquelle. Es wurden 4, 8 und 12 Elemente pro Wellenlänge benutzt.

der Grenzschichten abnimmt, bis schließlich ein minimaler Fehler, für eine gewisse Anzahl an Elementen pro Wellenlänge, erreicht ist und die Fehlerkurve abflacht.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine BEM zur effizienten Berechnung des Schallfeldes in einem absorbierenden Schichtsystem und im Halbraum darüber hergeleitet. Zur Verringerung des Rechenaufwands wurde die Rotationssymmetrie des Problems ausgenutzt. Das Problem der singulären BEM Integrale wurde mit einer Koordinatentransformation gelöst, die außerdem die Lösung der Radialanteile der BEM Integrale ermöglicht. Schließlich verblieben nur noch eindimensionale nicht-singuläre Integrale über den Winkel, die mit gewöhnlicher Gauß-Quadratur lösbar waren. Anhand eines einfachen numerischen Beispiels, wurde die Genauigkeit der Methode evaluiert. Das Endergebnis kann als eine numerische Halbraum Green's Funktion interpretiert werden.

Literatur

- [1] Allard, J. F., Atalla, N.: Modelling Multilayered Systems with Porous Materials using the Transfer Matrix Method, John Wiley & Sons, Ltd., (2009)
- [2] Möser, M.: Technische Akustik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012
- [3] Miki, Y.: Acoustical properties of porous materials. Modifications of Delany-Bazley models. Journal of the Acoustical Society of Japan (E), 11 (1), 19–24, (1990)
- [4] Kuijpers, A. H. W. M., Verbeek, G., Verheij, J. W.: An improved acoustic Fourier boundary element method formulation using fast Fourier transform integration. The Journal of the Acoustical Society of America 102 (3), 1394–1401, (1997)