

Systematische Untersuchung mathematischer Korrelationskriterien im Frequenzbereich

Christopher Blech¹, Sabine C. Langer¹

¹ Institut für Konstruktionstechnik, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: c.blech@tu-braunschweig.de

Einleitung

Die mechanische Modellbildung komplexer Strukturen oder neuartiger Effekte sowie die Lösung dieser mit Hilfe numerischer Verfahren bedarf stets einer Validierung. Ähnlich der essentiellen Frage nach der Anwendbarkeit eines Modells in [1] sei *Validierung* wie folgt definiert:

Ein Ersatzmodell eines strukturdynamischen Systems ist valide, wenn es für einen klar definierten Wertebereich die Struktur-Antwort des realen Systems in einer geforderten Genauigkeit prognostizieren kann.

Insbesondere grenzt sich die Validierung (binäre Entscheidung) von der Modellbewertung (quantitative Evaluation) ab. Um die Validität eines mechanischen Ersatzmodells zu zeigen, bedarf es somit einer Zieldefinition sowie eines standardisierten Vergleiches mit einem Experiment oder einem höherwertigen Modell. Erfüllt das zu prüfende Modell die vorgegebenen Anforderungen, ist es valide. Der vorliegende Beitrag beschränkt sich auf den Vergleich der direkten Struktur-Antwort im Frequenzbereich, sodass auch nichtlineare Systeme und Systeme mit hoher modaler Dichte berücksichtigt werden können.

In der Praxis werden für den Vergleich zweier Struktur-Antworten neben einfachen optischen Abgleichen oft mathematische Korrelationskriterien wie FDAC (Frequency Domain Assurance Criterion) oder FRAC (Frequency Response Assurance Criterion) herangezogen. Das Ergebnis sind reelle Werte zwischen 0 (keine Korrelation) und 1 (ideale Korrelation).

Um mathematische Korrelationskriterien im Rahmen einer Validierung zu nutzen, muss ein Zielwert definiert werden, ab welchem das untersuchte Modell als valide gilt. Der von dem Modell erreichte Wert interessiert dabei nicht, sondern lediglich die Einhaltung des geforderten Wertes. Die Entscheidung über den geforderten Wert bedarf eines (mechanisch) interpretierbaren Verhaltens des genutzten Kriteriums, welches in diesem Beitrag untersucht wird. Dazu werden systematische Veränderungen an einer exemplarischen Struktur-Antwort vorgenommen und die Reaktionen der Korrelationskriterien FRAC und FDAC ausgewertet.

Anforderungen an Korrelationskriterien

Es wird gefordert, dass ein im Rahmen einer Validierung eingesetztes Korrelationskriterium zum Vergleich zweier Struktur-Antworten folgende Eigenschaften aufweisen muss.

- **Objektivität** Das Kriterium muss mathematisch

eindeutig definiert sein, sodass die Entscheidung über die Validität eines Modells eindeutig nachvollzogen werden kann und eine Vergleichbarkeit gegeben ist.

- **Adaptionsmöglichkeit** Der anwendende Ingenieur muss Möglichkeiten haben, Toleranzgrenzen vorzugeben und Gewichtungen hinsichtlich der Validierung setzen zu können. Innerhalb der Adaption ergeben sich Zielwerte für ein valides Modell.
- **Interpretierbarkeit** Um einen Zielwert definieren zu können, muss das Ergebnis des Kriteriums mittels Aussagen über die Strukturodynamik des Systems interpretierbar sein.

Mathematische Korrelationskriterien

FRAC (Frequency Response Assurance Criterion) ist als normiertes quadratisches Skalarprodukt der als Vektoren aufgefassten Frequenzgänge definiert [2]:

$$FRAC(j) = \frac{(H_1(f, j)^T \cdot H_2(f, j))^2}{(H_1(f, j)^T \cdot H_1(f, j))(H_2(f, j)^T \cdot H_2(f, j))} \quad (1)$$

Dabei stellen $H_1(f, j)$ und $H_2(f, j)$ die zu vergleichenden komplexen Frequenzgänge des Freiheitsgrades j dar. FRAC wird entsprechend der Definition auf jeden Freiheitsgrad des untersuchten Systems angewendet und anschließend gemittelt, um einen globalen Wert zu erhalten. Zusätzlich wird der Vergleich mit dem globalen Freiheitsgrad der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz (für Systeme mit Einpunktanregung) herangezogen:

$$\overline{h^2} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N S_i \cdot \tilde{h}_i^2 \quad (2)$$

Dabei beschreibt S die Gesamtfläche, S_i die aufzusummierende Teilfläche, \tilde{h}_i die Übertragungsadmittanz der Teilfläche und N die Anzahl der betrachteten Punkte. FDAC (Frequency Domain Assurance Criterion) ist als normiertes quadratisches Skalarprodukt der als Vektoren aufgefassten Schwingformen definiert [3]:

$$FDAC(f_1, f_2) = \frac{|H_1(f_1, j)^T \cdot H_2(f_2, j)|^2}{(H_1(f_1, j)^T \cdot H_1(f_1, j))(H_2(f_2, j)^T \cdot H_2(f_2, j))} \quad (3)$$

Dabei stellen H_1 und H_2 die zu vergleichenden Schwingformen an den Frequenzstützstellen f_1 und f_2 dar.

FDAC wird auf jede mögliche Kombination der vorliegenden Schwingformen angewendet. Eine Mittelung der Einträge auf der Hauptdiagonalen kann als mögliche Validierungsgrundlage betrachtet werden.

Systematischer Forschungsansatz

Es werden physikalisch motiviert künstliche Änderungen auf eine exemplarische Struktur-Antwort aufgebracht (hier: Messung einer Einpunkt-erregten Plattenstruktur), um Sensitivitäten der Kriterien FRAC und FDAC abzuleiten und die Anwendbarkeit im Rahmen einer Validierung einzuschätzen.

Werden Steifigkeit oder Masse fehlerhaft modelliert, so kommt es in den Struktur-Antworten des Modells zu einer **Frequenzstreckung**, welche hier künstlich durch einen Dehnungsfaktor d auf den originalen Frequenzgang erzeugt wird.

$$H_2(f, j) = H_1(d \cdot f, j) \quad (4)$$

Dabei weist der veränderte Frequenzgang H_2 eine um $100 \cdot (1 - d) \%$ in der Frequenz verschobene Struktur-Antwort auf. Um die für das Skalarprodukt nötige Diskretisierung beizubehalten, ist eine Interpolation der Werte nötig.

Die zweite systematische Änderung behandelt eine falsche Abbildung der Dämpfung, was zu **Amplitudenunterschieden** führt. Die Amplituden des veränderten Frequenzgangs werden auf Basis einer linearen Amplituden-abhängigen Abstufung zwischen $s_1 = 0$ für $|\tilde{h}^2|_{min}$ und $s_1 = 1$ für $|\tilde{h}^2|_{max}$ im originalen Frequenzgang verändert. Es entstehen Frequenz-selektive künstlich erzeugte Signalverstärkungen.

$$H_2(f, j) = (1 + s_1(f) \cdot s_2) H_1(f, j) \quad (5)$$

Der Skalierungsfaktor s_2 wird für die Effektstärke in der Parameterstudie variiert.

Als drittes relevantes und häufig auftretendes Fallbeispiel wird eine **fehlende Resonanzanregung** betrachtet. So werden in Modellen idealisierende Annahmen getroffen und der Fokus auf die interessierenden Effekte gelegt. Beispielsweise kann eine Torsionsschwingung eines Balkens aufgrund der idealen Anregung senkrecht zur Oberfläche im Modell nicht auftreten, wohingegen im Experiment aufgrund von leichten Ungenauigkeiten im Aufbau genau diese Eigenform angeregt wird und deutlich sichtbar werden kann. Dementsprechend wird als dritte systematische Änderung die Entfernung einer Resonanz (hier bei 143 Hz) aus dem Frequenzgang jedes Freiheitsgrades durch Interpolation angeführt. In dieser Untersuchung kann lediglich die Amplitude der Struktur-Antwort verglichen werden.

Abschließend sei das Auftreten von **Störgeräuschen** in der Messung genannt, welches als vierte Änderung systematisch auf Frequenzgänge angewendet wird. Dafür wird dem Signal ein weißes gaußsches Rauschen mit verschiedenen SNR (Signal-Rausch-Verhältnis) additiv aufgeprägt.

Ergebnisse

Frequenzstreckung

Abbildung 1 zeigt FRAC für verschiedene Dehnungsfaktoren d . Sowohl die über alle dof gemittelten (Feldgröße), als auch die auf \tilde{h}^2 (Energiegröße) basierenden FRAC Werte sinken bei einer Frequenzstreckung von 2 – 3 % unterhalb 0,2. FRAC zeigt ähnlich zu den Untersuchungen am physikalischen Modell in [4] aufgrund der mathematischen Formulierung verhältnismäßig hohe Sensitivitäten gegenüber einer Frequenzstreckung, welche durch das Skalarprodukt geprägt sind. Trotz geringer Abweichungen der Resonanzen würde die nicht regelbare hohe Sensitivität des FRAC im Rahmen einer Validierung schnell zu ungünstigen Modellen führen. Die Einführung eines Verschiebungsfaktors β [2] ist für das hier eingesetzte idealisierte Modell zwar denkbar (FRAC würde erst außerhalb des definierten Rahmens sinken), in der Anwendung aufgrund von inhomogenen Modellfehlern, welche zu unterschiedlichen Frequenzstreckungen führen, jedoch nicht sinnvoll.

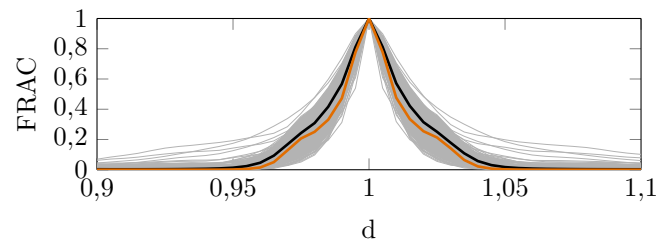


Abbildung 1: ¹ FRAC Werte nach Frequenzstreckung um Dehnungsfaktor d

Eine Frequenzstreckung ist in der FDAC Matrix anhand der maximalen FDAC Werte abseits der Hauptdiagonalen deutlich erkennbar (siehe Abbildung 2). Pro Spalte der Matrix kann nach Identifizierung des maximal auftretenden FDAC ein (hier konstantes) Δf nach [3] bestimmt werden. Spaltenweise ist entsprechend dem maximal auftretenden FDAC die Frequenzstreckung bekannt, sodass im Rahmen einer Validierung eine Gewichtung der Einträge vorgenommen werden kann. Alternativ können die Hauptdiagonaleinträge $FDAC_{f_1, f_1}$ betrachtet werden (Abbildung 3). Es sind frequenzabhängige Einbrüche erkennbar, welche sich mit steigendem d intensivieren. Eine Mittelung der Hauptdiagonaleinträge über d zeigt Abbildung 4. Im Gegensatz zu FRAC sinkt FDAC für Frequenzabweichungen von 2–3 % im Mittel lediglich auf 0,7 ab, weist also aufgrund des Vergleichs von Schwingformen ein stabileres und im Rahmen einer Validierung besser interpretierbares Verhalten auf. Jedoch bleibt die Definition eines akustisch motivierten Grenzwertes für FDAC auch zusammen mit einer identifizierten Frequenzabweichung schwierig. Trotz einer identifizierten durchschnittlichen Frequenzabweichung kann kein Zielwert für FDAC angegeben werden, ab welchem Schwingformen mechanisch motiviert gut übereinstimmen.

¹grau: FRAC pro dof; schwarz: Mittelwert über alle dof; orange: FRAC angewendet auf mittlere quadratische Admittanz

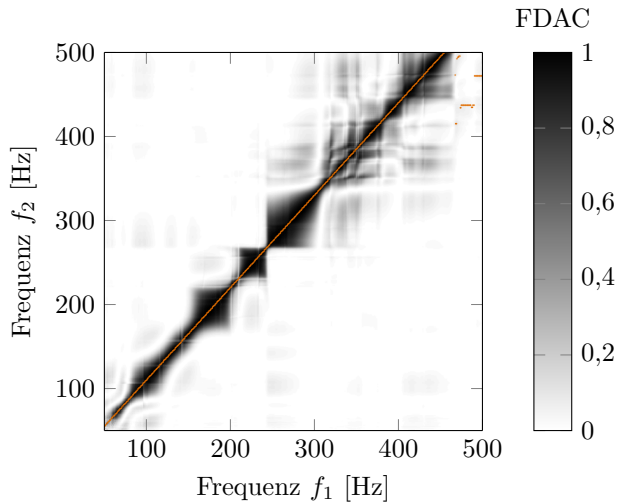


Abbildung 2: FDAC Matrix nach Frequenzstreckung um Dehnungsfaktor $d = 1,1$; Maximalwerte spaltenweise markiert mit orangenen Punkten

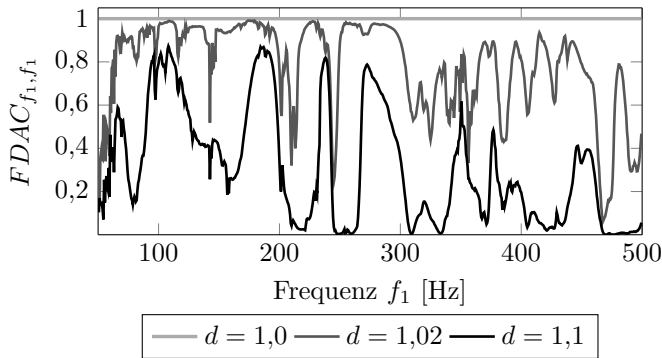


Abbildung 3: $FDAC_{f_1,f_1}$ über f_1 für verschiedene Dehnungsfaktoren d

Amplitudenunterschiede

Abbildung 5 zeigt FRAC für verschiedene s_2 . FRAC sinkt im Mittel (Energie- und Feldgröße) auf lediglich 0,85 bei maximalen Amplitudenverstärkungen um den Faktor $s_2 = 10$. Im Vergleich mit Frequenzabweichungen verhält sich FRAC hier deutlich weniger sensitiv. Im Rahmen einer Validierung wäre eine Zielwertdefinition entsprechend kaum möglich, denn von einem validen Modell wird in den meisten Fällen eine zuverlässigere Amplitudengenauigkeit als in diesem Beispiel erwartet oder eine adäquate Frequenzstreckung (im Vergleich zum letzten Abschnitt) zugelassen.

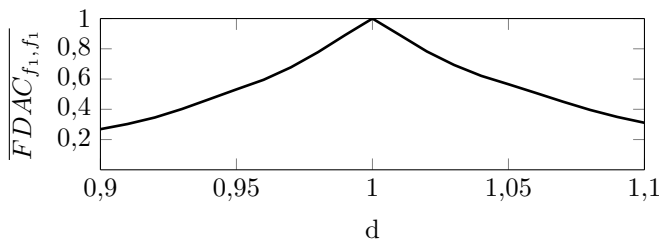


Abbildung 4: Mittlere $FDAC_{f_1,f_1}$ über d

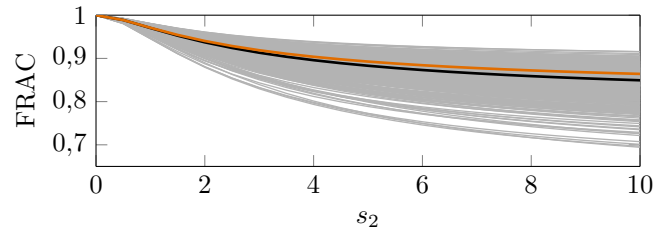


Abbildung 5: 1 FRAC Werte nach Skalierung der Amplituden um Parameter s_2

Das normierte Skalarprodukt im FDAC ist unabhängig von einer frequenz-selektiven Signalverstärkung, sodass die FDAC Matrix identisch bleibt. Das heißt für die Aufgabe der Validierung, dass der FDAC Wert an sich nicht genutzt werden kann. Es muss ein zusätzliches Kriterium wie der FRSF (Frequency Response Scaling Factor) [3] herangezogen werden, welcher spaltenweise das Amplitudenverhältnis für die Schwingformen mit dem maximalen FDAC (hier Hauptdiagonale) prüft. Abbildung 6 zeigt den FRSF für die vorliegende Modifikation. Erneut wäre eine Gewichtung des FDAC mit dem FRSF für eine Validierung denkbar (ähnlich Δf). Die Entscheidung, ab welchem resultierenden FDAC Wert Schwingformen mechanisch begründet genügend übereinstimmen, bleibt jedoch unbeantwortet.

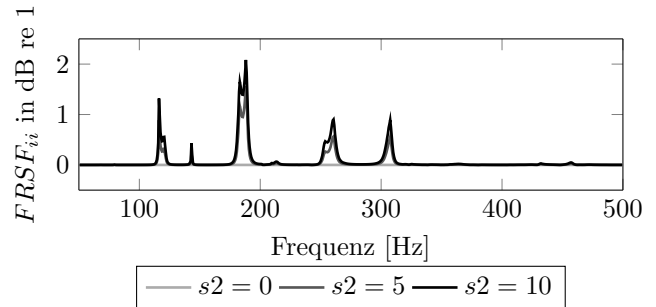


Abbildung 6: FRSF Werte nach Skalierung der Amplituden um Parameter s_2

Fehlende Resonanzanregung

Die künstliche Entfernung einer Resonanz (143 Hz) im gesamten Frequenzgang (50 – 500 Hz) führt zu einem kaum abgesenkten FRAC von 0,984 im Mittel aller Freiheitsgrade. Ein FRAC von 0,999 ermittelt aus $\overline{h^2}$ suggeriert keinerlei Defizite im Modell.

Abbildung 7 zeigt $FDAC_{f_1,f_1}$ im Frequenzbereich der entfernten Resonanz. Das FDAC sinkt bis auf 0,6 ab, wodurch die Störung im Frequenzgang zunächst deutlich erkennbar ist. Jedoch erscheint ein Wert von 0,6 für eine künstlich eingefügte lineare Interpolation anstelle der physikalisch korrekten Resonanz als ein sehr hoher Wert, sodass eine Zielwertdefinition im Rahmen einer Validierung vor dem Hintergrund fehlender Resonanzen relativ hoch ausfallen muss. Zudem hat sich kein signifikanter Einfluss auf $\overline{FDAC_{f_1,f_1}}$ ergeben. Für eine Validierung reicht entsprechend der Mittelwert nicht aus, alternativ kann ein $\min FDAC_{f_1,f_1}$ formuliert werden.

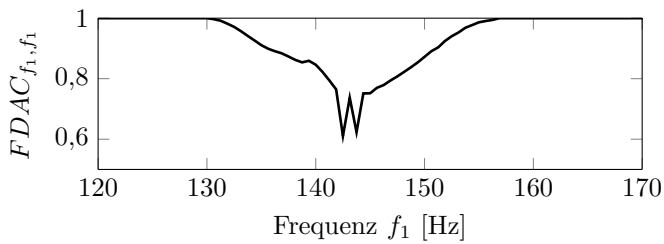


Abbildung 7: $FDAC_{f_1, f_1}$ nach Entfernung einer Resonanz bei $f = 143$ Hz

Störgeräusche

Unter dem Einfluss von Störgeräuschen sinkt FRAC progressiv ab und erreicht hier einen Wert von 0,5 bei $SNR = 0$ dB (Abbildung 8). Bei einem SNR von 0 dB ist kaum noch das originale Signal erkennbar, sodass der FRAC Wert vor dem Hintergrund einer Validierung hier sehr hoch erscheint. Auf der anderen Seite konvergiert FRAC gegen 1 mit steigendem SNR und ist bei praxisnahen Signal-Rausch-Verhältnissen von über 10 dB bereits größer als 0,9. FRAC, angewendet auf \tilde{h}^2 , ist aufgrund der Mittelung des additiven weißen gaußschen Rauschens stets nahezu 1.

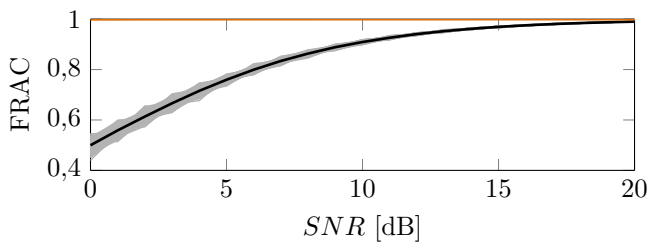


Abbildung 8: 1 FRAC Werte bei Störgeräuschen verschiedener SNR

$FDAC_{f_1, f_1}$ bricht hingegen bereits bei großen SNR deutlich ein. Abbildung 9 zeigt, dass bereits bei $SNR = 25$ dB Absenkungen von bis zu 0,5 erkennbar sind. Im tieffrequenten Bereich sinkt $FDAC_{f_1, f_1}$ unter 0,2, was mit der Signalstärke zu begründen ist. Es ist festzuhalten, dass bei einem idealen Modell in der Praxis durchgeführte Messungen zu relativ geringen $FDAC$ Werten führen können. Auch anhand $FDAC_{f_1, f_1}$ lässt sich die verhältnismäßig hohe Sensitivität gegenüber Störgeräuschen erkennen (Abbildung 10). $FDAC_{f_1, f_1}$ konvergiert mit SNR gegen 1, ab einem SNR von 30 dB steigt $FDAC_{f_1, f_1}$ über 0,9.

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Untersuchung zeigt am Beispiel einer Platten-Antwort für vier typische Abweichungen in Frequenzgängen stark unterschiedliche Reaktionen von FRAC und $FDAC$. Eine Zielwertdefinition dieser mathematisch geprägten Kriterien ist kaum möglich, da unterschiedliche Sensitivitäten sowie nur eingeschränkte Adaptionmöglichkeiten der Kriterien gegeben sind. Für weiterführende Untersuchungen erscheint eine Adaption (z.B. Gewichtung) von FRAC als ungeeignet und eine

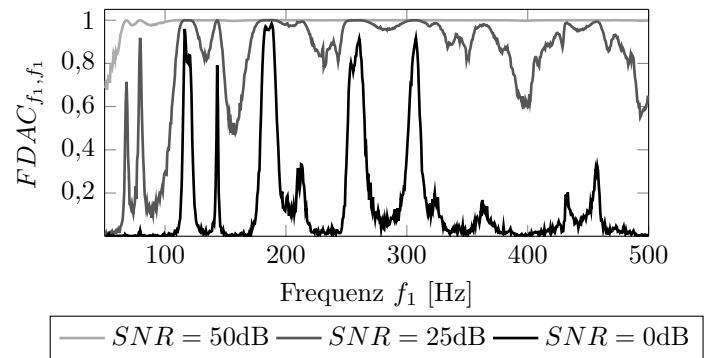


Abbildung 9: $FDAC_{f_1, f_1}$ bei verschiedenen SNR

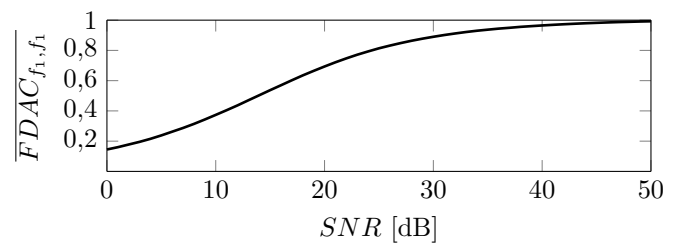


Abbildung 10: $FDAC_{f_1, f_1}$ bei verschiedenen SNR

Adaption von $FDAC$ als sehr umständlich. Es sollten neue Ansätze für die Modellvalidierung verfolgt werden, welche Modell- und Messunsicherheiten berücksichtigen (ähnlich [5, 6]) und im Gegensatz zum Skalarprodukt eine Ingenieur-geprägte Interpretationsgrundlage auf der Basis von Ergebnisräumen bieten.

Literatur

- [1] Pintelon, R., Schoukens, J.: „System Identification A Frequency Domain Approach”, IEEE press, 2012.
- [2] Heylen, W., Lammens, S.: „FRAC: A Consistent way of Comparing Frequency Response Functions”, Proceedings, International Conference on Identification in Engineering, Swansea, S. 48-57, 1996.
- [3] Pascual, R., Golinval, J., Razeto, M.: „A Frequency Domain Correlation Technique for Model Correlation and Updating”, Proceedings, International Modal Analysis Conference, S. 587-592, 1997.
- [4] Blech, C., Shi, X., Langer, S. C.: Über die Sensitivität des FRAC für eine objektive Validierung mechanischer Modelle, Proceedings, DAGA Aachen, Germany, 2016.
- [5] Moya, A. C., Harvie, J. M., Starr, M. J.: „The Challenge of Dynamic Similarity Assessment”, In Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3, S. 235-241, Springer International Publishing, 2016.
- [6] Lee, D., Ahn, T., Kim, H.: „A Validation Metric of FE Model for Noise and Vibration Responses”, Proceedings, 23rd ICSV Athens, Greece, 2016.