

## Vergleich verschiedener Abtastmethoden auf der Kugeloberfläche

Johannes Brand<sup>1,3</sup>, Wolfgang Kreuzer<sup>1</sup>, Manuel Gräf<sup>1</sup>, Martin Ehler<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Österreichische Akademie der Wissenschaften, Institut für Schallforschung, 1040 Wien, Österreich

<sup>2</sup>Universität Wien, Abteilung für Mathematik, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Wien, Österreich

<sup>3</sup>Email: jbrand@kfs.oew.ac.at

### Abstrakt

Bei der Darstellung von Schallfeldern im Raum und im Speziellen auf der Kugeloberfläche spielen die sogenannten Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics) eine wichtige Rolle. Die Koeffizienten einer Zerlegung des Wellenfelds in diese Funktionen können entweder durch einen Least Square Ansatz oder durch effiziente Quadraturmethoden bestimmt werden. Im Allgemeinen ist es dazu aber notwendig, die Kugeloberfläche mit einem diskretem Gitter, das oft auf Quadraturmethoden basiert, abzutasten. Im folgenden Beitrag wollen wir verschiedene Abtastgitter auf der Kugeloberfläche (z.B. Sloan-Womersley, Lebedev) mit speziellen Quadraturgittern (M. Gräf: <http://homepage.univie.ac.at/manuel.graef/quadrature.php>) vergleichen und für alle Gitter den Interpolationsfehler innerhalb der Kugel untersuchen.

### Einleitung

In verschiedensten 3D-Audio Anwendungen (z.B. Messungen von Schallfeldern mittels kugelförmigen Mikrophon-Arrays) kann die gesamte akustische Szenerie durch das Schallfeld  $p(\mathbf{x}, k)$  beschrieben werden, wobei  $p$  den (komplexen) Schalldruck an einem Punkt  $\mathbf{x}$  im Raum darstellt. Im Fall einer ebene Welle beschreibt der Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , der durch die Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{d}$  und die Wellenzahl  $k$  gegeben ist, das Schallfeld.

Mittels Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}(\phi, \theta)$  ist es möglich,  $p(\mathbf{x}, k)$  den Schalldruck als Lösung der Schwingungsgleichung darzustellen,

$$p(\mathbf{x}, k) = p(r, \theta, \phi, k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_{\ell m} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}(\phi, \theta), \quad (1)$$

wobei  $j_{\ell}(x)$  die sphärische Besselfunktion der Ordnung  $\ell$  ist. In der Praxis werden die Koeffizienten  $p_{\ell m}$  entweder über Quadraturverfahren oder über Least Square Approximation bestimmt werden. Zu diesem Zweck ist es notwendig den Schalldruck  $p$  an bestimmten Stellen im Raum abzutasten (z.B. an der Oberfläche einer Kugel) und in der Literatur gibt es eine Vielzahl von Verfahren, gute Abtastpunkte zu bestimmen.

In dieser Arbeit wollen wir das Verhalten verschiedener Abtast-Gitter auf der Kugeloberfläche miteinander vergleichen. Im Speziellen wollen wir zwei neue Gitter untersuchen, die bis jetzt noch kaum in der Praxis verwendet wurden [3]. Wir wollen jedoch darauf hinweisen, dass wir uns nur auf Abtastgitter *auf* der Kugel beschränken.

Auf die Bestimmung von zusätzlichen Punkten innerhalb der Kugel zur Unterstützung der Stabilität der Approximation bei irregulären Frequenzen wird hier nicht eingegangen, für diesen Zweck verweisen wir zum Beispiel auf [1]. Darüber hinaus wollen wir herausstreichen, dass wir nicht am einer Interpolation per se interessiert sind, d.h. wir können nicht garantieren, dass die Approximation mittels Kugelflächenfunktionen das Schallfeld an den Abtastpunkten exakt darstellt. Vielmehr ist die Qualität der Approximation des Feldes innerhalb der ganzen Kugel von Interesse.

### Kugelflächenfunktionen

Durch ihre Eigenschaft, auf der Einheitskugel  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  eine orthonormal Basis für  $L^2(\mathbb{S}^2)$  zu bilden, dh.

$$\begin{aligned} \langle Y_{\ell m}, Y_{\ell' m'} \rangle &= \int_{\mathbb{S}^2} Y_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* d\Omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell m}(\phi, \theta) Y_{\ell' m'}^*(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi = \\ &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (2)$$

spielen die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell m}(\phi, \theta) := \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}, \quad (3)$$

eine wichtige Rolle bei der Darstellung von Funktionen auf der Einheitskugel. In Gl. (2) und (3) bezeichnen  $P_{\ell}^m(\cos(\theta))$  zugeordnete (assoziiert) Legendre Polynome und  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta. Es gilt  $(x+iy)^* = (x-iy)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Approximation von Schallfeldern

Bei Sphärischen Mikrophonarrays erlaubt die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}$ , die Koeffizienten  $p_{\ell m}$  in Gl. (1) mittels

$$p_{\ell m} = \frac{\int_{\mathbb{S}^2} p(\mathbf{x}, k) Y_{\ell m}^*(\mathbf{x}) d\Omega}{j_{\ell}(kr)}. \quad (4)$$

zu bestimmen. In der Praxis wird das Integral in Gl. (4) mittels geeigneter Quadraturformel

$$Q_N(I) = \sum_{n=1}^N w_n p(\mathbf{x}_n, k) Y_{\ell m}^*(\phi_n, \theta_n) \quad (5)$$

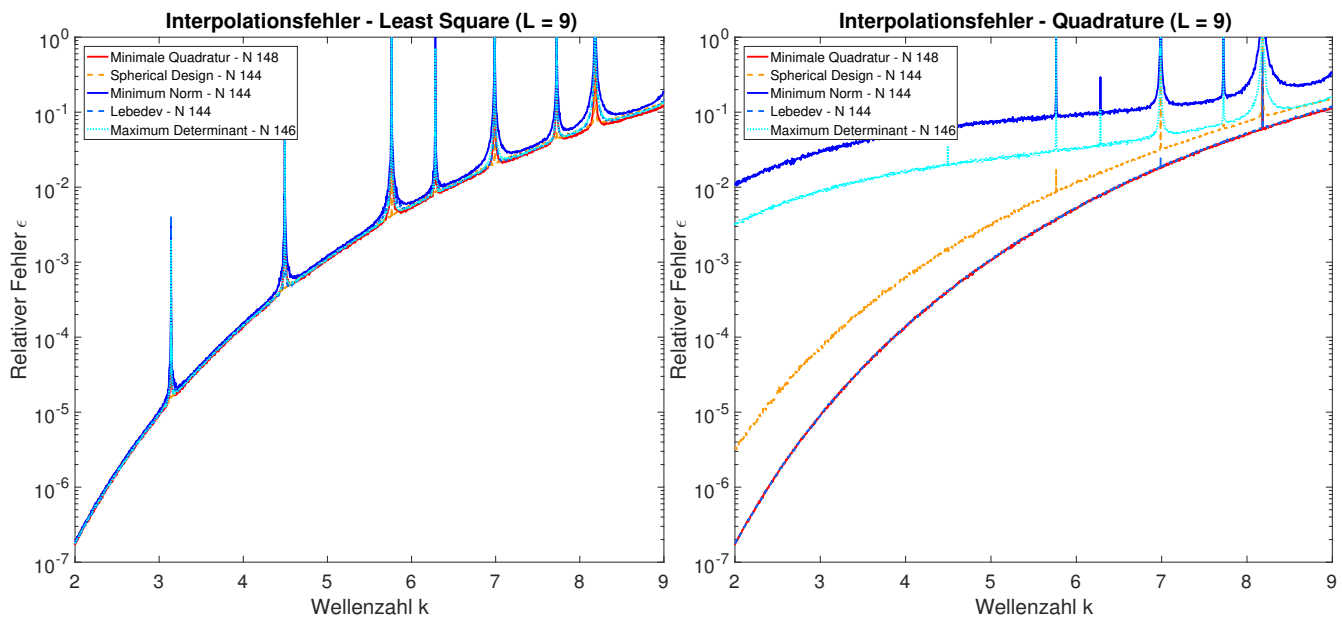


Abbildung 1: Interpolation ohne Störungen

numerisch berechnet, wobei  $\mathbf{x}_n = (\phi_n, \theta_n)$  Quadraturknoten auf der Kugel und  $w_n$  die dazugehörigen Gewichte der jeweiligen Quadraturformel sind.

Als Alternative zu Quadraturmethoden ist es auch möglich, den unbekannt Koeffizienten  $p_{\ell m}$  mittels Least Squares Approximation

$$\min_{p_{\ell m}} \left\| p(\mathbf{x}_n, k) - \sum_{\ell=0}^{L_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_{\ell m} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}(\phi_n, \theta_n) \right\|^2 \quad (6)$$

zu bestimmen, wobei  $\mathbf{x}_n = (\phi_n, \theta_n)$  durch ein Abtastgitter auf der Kugel, das in der Regel ebenfalls durch eine Quadraturformeln bestimmt wird, gegeben ist, und  $L_{\max}$  die maximale Ordnung der verwendeten Kugelflächenfunktionen ist.

## Quadratur Gitter

Folgende Abtastgitter wurden in dieser Arbeit untersucht:

**Minimale Quadraturgitter** : Quadraturgitter (Gauß-Typ) <sup>1</sup> basierend auf [3]. Es ist zu beachten, dass es zurzeit, bis auf Abschätzungen, keine Aussagen für die minimale Anzahl  $N$  an benötigten Stützstellen für Quadraturformeln gibt, welche Kugelflächenfunktionen bis zu eine vorgegebenen Ordnung  $L$  *exakt* integrieren. In [3] wurde mithilfe theoretischer und numerischer Methoden versucht, Quadraturgitter für Ordnungen bis  $L = 44$  mit möglichst wenig Stützstellen zu bestimmen. Diese wurden numerisch durch Minimieren einer Fehlerfunktion mithilfe effizienter Algorithmen berechnet. Der Vergleich mit aktueller Literatur bzw. bekannten Quadraturgittern zeigt, dass keine Quadraturformeln be-

kannt sind, welche zu vorgegebener Ordnung mit weniger Stützstellen auskommen.

**Spherical designs**: Quadraturgitter mit konstanten Gewichten (Chebyshev-Typ)<sup>2</sup> basierend auf [3]. Auch hier ist zu beachten, dass es derzeit, bis auf Abschätzungen, keine Aussagen für die minimale Anzahl  $N$  an benötigten Stützstellen für spherical designs zu vorgegebener Ordnung  $L$  gibt. Da die Gewichte mit  $w = 4\pi/N$  fest vorgegeben sind, werden mehr Quadraturpunkte als für minimale Quadraturgitter benötigt. Wie bei den minimalen Quadraturgittern konnten die Methoden aus [3] zur Berechnung von spherical designs mit möglichst wenig Stützstellen bis zur Ordnung  $L = 124$  verwendet werden.

**Minimum Norm**: Hyperinterpolation Gitter basierend auf den MN-Knoten<sup>3</sup> von Sloan-Womersley [4].

**Maximum Determinant**: Hyperinterpolation Gitter basierend auf den MD-Knoten<sup>4</sup> von Sloan-Womersley [4] Dieses Gitter erwies sich in [2] schon als sehr effizient.

**Lebedev**: Das Lebedev Gitter<sup>5</sup> ist ein häufig verwendetes Quadraturgitter auf der Kugeloberfläche und wird als Benchmark benutzt.

<sup>1</sup><http://homepage.univie.ac.at/manuel.graef/quadrature.php>

<sup>2</sup><http://homepage.univie.ac.at/manuel.graef/quadrature.php>

<sup>3</sup>[http://web.maths.unsw.edu.au/~rsw/Sphere/Images/MN/mn\\_data.html](http://web.maths.unsw.edu.au/~rsw/Sphere/Images/MN/mn_data.html)

<sup>4</sup>[https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/sphere\\_maximum\\_determinant/sphere\\_maximum\\_determinant.html](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/sphere_maximum_determinant/sphere_maximum_determinant.html)

<sup>5</sup>[https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/sphere\\_lebedev\\_rule/sphere\\_lebedev\\_rule.html](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/sphere_lebedev_rule/sphere_lebedev_rule.html)

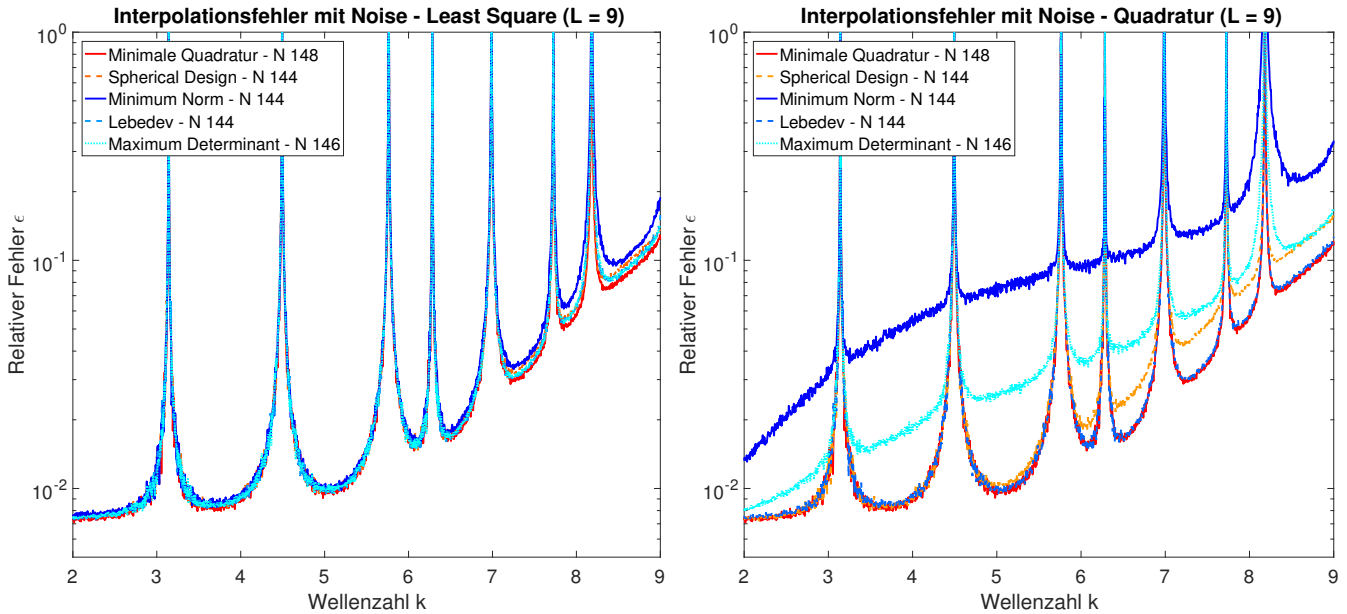


Abbildung 2: Interpolation mit Rauschen

## Numerische Beispiele

### Simulationsaufbau

Um die unterschiedlichen Qualitäten der Quadraturmethode und des Least-Square-Algorithmus zu bestimmen, wurde eine Schallfeld im Raum simuliert. Dieses wurde durch eine ebene Welle, deren Propagationsrichtung  $\mathbf{d}$  zufällig abgeändert wurde, erzeugt:

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (7)$$

Für jede Wellenzahl wird die Ausbreitungsrichtung zehnmal zufällig vorgegeben und über die Fehler gemittelt. Der Schalldruck wird an den durch die Gitter vorgegebenen Punkten ausgewertet und die Koeffizienten der Kugelflächenfunktion berechnet. Mit Hilfe dieser wird die Funktion auf einer Kugel mit equiangularen/equidistanten Punkten im Inneren ausgewertet und mit der vorgegebenen ebenen Welle verglichen.

Die Stabilität der Abtastgitter wird durch Rauschen (SNR = 40), welches dem Signal überlagert wird, und Jitter, also kleine, zufällige Änderungen der einzelnen Punkte, getestet. So wurde die Positionen der Mikrophone um 0.005 Einheiten zufällig verschoben. Wichtig ist auch die Betrachtung der Robustheit bezüglich der Erhöhung der Wellenzahl  $k$ . So muss die Ordnung der Punktgitter und die Ordnung der Kugelflächenfunktionen groß genug sein, um die Funktion ausreichend aufzulösen.

### Fehlermaß

Um die Genauigkeit der Interpolation auf der Kugel abzuschätzen, wurden die Relativfehler  $\varepsilon$  des interpolierten Schalldrucks  $\tilde{p}$  zu der Wellenfunktion  $\hat{p}$  mit der  $L^2$ -Norm

über der gesamten Kugel bestimmt:

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{p} - \tilde{p}\|_{L_2}}{\|\hat{p}\|_{L_2}} \quad (8)$$

$$\|p\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |p|^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr}. \quad (9)$$

## Ergebnisse

Interpolationen bei verschiedenen Punktgittern erzeugen deutliche Unterschiede bei den Interpolationsfehlern. Stört man das Signal in keinsten Weise (Abb. 1), bringt der Least-Square Ansatz für alle Abtastgitter die gleichen Ergebnisse. Vergleicht man die Fehler bei der Quadratur, so erhält man bei den Sloan-Womersley Punkten im Vergleich zu den Quadraturgittern (minimale, spherical designs und Lebedev) deutlich ungenauere Ergebnisse.

Stört man das Signal mit Rauschen (Abb. 2), so ist die Least-Square Methode weiterhin stabil, die Quadratur mit minimalen Gittern und Lebedev Gittern erzeugen eine ähnliche Fehlerverteilung in Abhängigkeit von der Wellenzahl  $k$ . Verwackelt man die Mikrophonepositionen noch durch Jitter (Abb. 3), ist der Fehler der Quadratur besonders bei niedrigeren Wellenzahlen ( $k < 5$ ) größer als der des Least-Square Algorithmus.

Die Spitzen der Fehlerkurven entstehen durch Nullstellen der Besselfunktionen, da durch diese zur Berechnung der Koeffizienten dividiert wird.

Es fällt auf, dass die Ordnung der Punktgitter eine wichtige Rolle bei der Quadratur und folglich bei der Interpolation mit den Kugelflächenfunktionen spielt. Da die Raster so gewählt wurden, dass alle eine möglichst gleiche Anzahl an Punkten ( $n = (146 \pm 2)$ ) aufweisen, erkennt

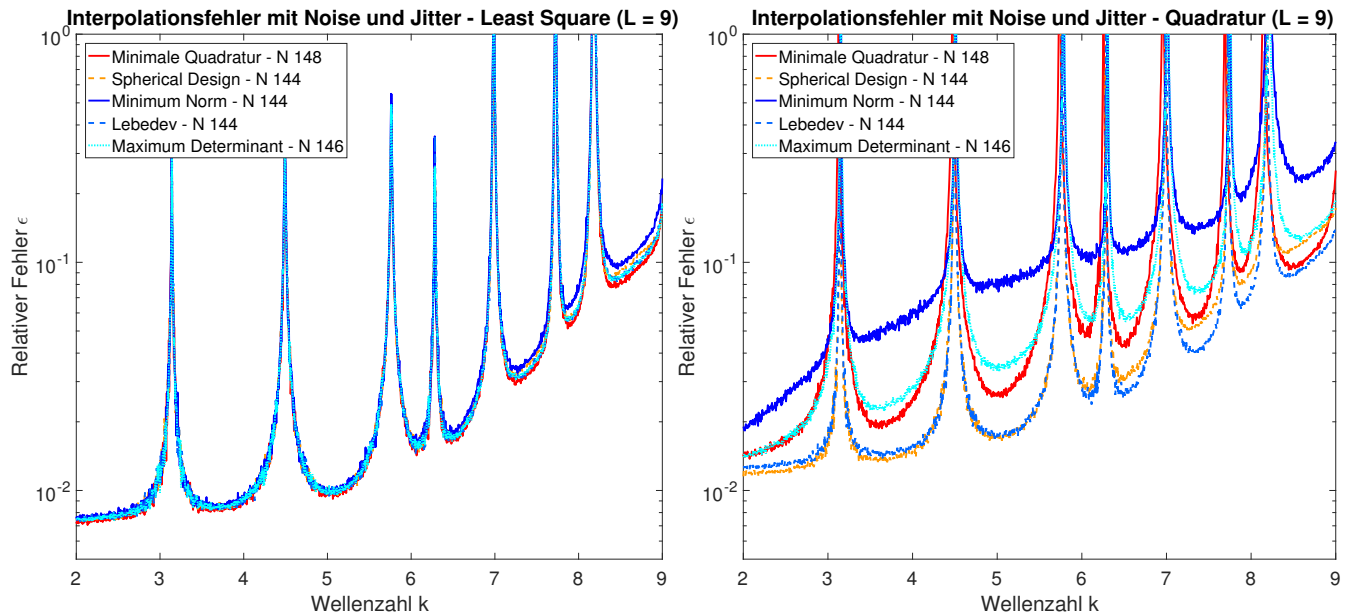


Abbildung 3: Interpolation mit Rauschen und Jitter

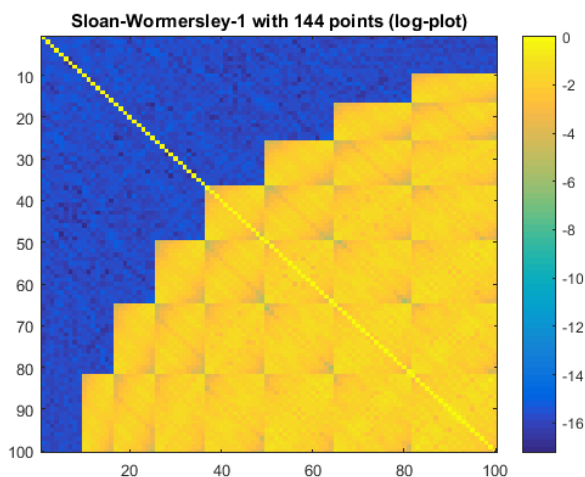


Abbildung 4: Integration der Kugelflächenfunktionen

man, dass bei dieser Anzahl an Stützstellen die minimalen Quadraturgitter und Lebedev-Punkte eine relativ hohe Ordnung der Quadraturregel aufweisen.

Betrachtet man für ausgewählte Wellenzahlen (z.B.  $k = 5$ ) die Matrix mit den berechneten Koeffizienten der Kugelflächenfunktionen, so fällt auf, dass diese bei Sloan-Womersley Gittern teilweise kein Orthonormalsystem darstellen, da die Ordnung der Punkte zu gering ist. Bestimmt man die inneren Produkte der numerisch ermittelten Kugelflächenfunktionen, so erhält die Matrix in Abb. 4, anstelle der Einheitsmatrix bei analytischer Berechnung über das Integral. Es zeigen sich Ungenauigkeiten ab der für die Punktgitter zu hohen Ordnungen der Kugelflächenfunktionen.

## Zusammenfassung

Man sieht, dass bei geringen Anzahl an Punkten die Least-Square Methode eine genauere Lösung erzeugt. Diese ist jedoch rechenaufwendiger als die Quadratur mit vorgegebenen Gewichten. Hat man also eine große Anzahl an Punkten, ist die Quadratur der Methode der kleinsten Quadrate vorzuziehen.

## Danksagung

Dieses Arbeit wurde mit Hilfe des FWF-Projekts: BIOTOP, Adaptive Wavelet and Frame techniques for acoustic BEM (I-1018-N25) und des Vienna Science and Technology Fund (WWTF):Pr. VRG12-009 durchgeführt.

## Literatur

- [1] G. Chardon, W. Kreuzer, and Noisternig M. Design of spatial microphone arrays for sound field interpolation. *IEEE J. Sel. Top. Signa.*, 9(5):780–790, 2015.
- [2] G. Chardon, W. Kreuzer, and M. Noisternig. Design of a robust open spherical microphone array. In *Proceedings of the 39th International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP 2014)*, Florence, Italy, 2014.
- [3] M. Gräf. *Efficient algorithms for the computation of optimal quadrature points on Riemannian manifolds*. PhD thesis, TU Chemnitz, 2013.
- [4] Robert S. Womersley and Ian H. Sloan. How good can polynomial interpolation on the sphere be? *Advances in Computational Mathematics*, 14(3):195–226, 2001.