

Eigenwertproblem und modale Superposition im akustischen Außenraum

Lennart Moheit & Steffen Marburg

Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, Technische Universität München

85748 Garching b. München, Email: lennart.moheit@tum.de

Einleitung

Die numerische Simulation der abgestrahlten Schalleistung erfordert einen hohen Rechenaufwand, insbesondere dann, wenn die Lösung für viele Frequenzen gesucht ist oder verschiedene Lastfälle untersucht werden sollen. Die Methode der *Normal Modes* erlaubt die modale Zerlegung des akustischen Außenraums auf Basis von finiten und infiniten Elementen (FEM+IFEM) mittels eines einzelnen Eigenwertproblems im Zustandsraum. Die frequenzunabhängigen *Normal Modes* müssen einmalig bestimmt werden und erlauben nachträglich die Lösung des Schalldruckfeldes und der -leistung für beliebige Lastfälle und Frequenzen bei deutlich geringerem Rechenaufwand im Vergleich zur harmonischen Analyse. In dieser Arbeit werden zwei Kriterien zur Identifikation irrelevanter Moden diskutiert, die bei der modalen Superposition vernachlässigt werden können und den Rechenaufwand verringern können.

Theorie

Das räumliche Schalldruckfeld $p(\mathbf{x})$ kann durch die Helmholtz-Gleichung zu jeder Frequenz beschrieben werden

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

mit der Wellenzahl $k = \omega/c$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$. Im Inneren des Fluids gelte auf der Oberfläche von Strukturen eine ungedämpfte Randbedingung, sodass die Strukturschnelle v_s und die Fluidschnelle v_f identisch sind und die Randadmittanz gleich Null $Y(\mathbf{x}) = 0$. Das akustische Außenraumproblem ist charakterisiert durch die äußere, reflexionsfreie Randbedingung, die mittels der Abstrahlbedingung von Sommerfeld erfüllt ist [1].

Ein kreisförmiges Berechnungsgebiet, das alle inneren Strukturen umschließt, wird mit finiten Elementen diskretisiert und vernetzt, sodass die Lösung der Helmholtz-Gleichung in Form von diskreten, frequenzunabhängigen Systemmatrizen für die Steifigkeit \mathbf{K} , die Dämpfung \mathbf{D} , die Masse \mathbf{M} und die Randmassenmatrix Θ gefunden werden kann [2]

$$(\mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = i\omega\rho_f\Theta\mathbf{v}_s = \mathbf{f}. \quad (2)$$

Die *konjugierte Astley-Leis* Infinite Elemente Methode (IFEM) [3, 4, 5] ergänzt die obigen Systemmatrizen um weitere Freiheitsgrade in radialer Ausdehnung um das Gebiet der finiten Elemente hinaus. Zur radialen Interpolation werden Jacobi-Polynome ($\alpha = 1, \beta = 0$) genutzt, da diese eine bessere Matrixkondition liefern, als Lagrange-Polynome [6, 7, 8].

Das obige lineare Gleichungssystem kann im homogenen Fall als quadratisches Eigenwertproblem mit den Eigenwerten $\lambda = -ik$ gelöst werden. Hierzu das Problem in eine Zustandsraumformulierung überführt

$$(\mathbf{A} + ik\mathbf{B})\mathbf{z} = \mathbf{r} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{z} = \mathbf{r} \quad (3)$$

mit $\mathbf{z} = [-ik\mathbf{p}, \mathbf{p}]^T$, $\mathbf{r} = [\mathbf{0}, -\mathbf{f}]^T$ und den Zustandsraummatrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} [9, 10, 11]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Aufgrund der konjugierten Formulierung der infiniten Elemente sind die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} nicht symmetrisch und es ergeben sich Links- und Rechtseigenvektoren \mathbf{y}_z , \mathbf{x}_z , welche in spaltenweise zusammengesetzten modalen Matrizen \mathbf{Y}_z und \mathbf{X}_z die Zustandsraummatrizen diagonalisieren

$$\mathbf{Y}_z^T \mathbf{A} \mathbf{X}_z = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N-\delta}) \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_z^T \mathbf{B} \mathbf{X}_z = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_{2N-\delta}). \quad (6)$$

Die Eigenvektoren werden als *Normal Modes* bezeichnet. Der Index z gibt an, dass die Vektoren in der Dimension des Zustandsraumes angegeben sind. Bei kreisförmigen Rechengebieten ist die Massenmatrix im Gebiet der infiniten Elemente eine Nullmatrix [3]. Nach Marburg [10] reduziert sich die Größe des Zustandsraumsystems $2N$ jedoch um den verringerten Rang der Massenmatrix δ .

Aus dem Verhältnis der Diagonaleinträge (α_j, β_j) ergeben sich wiederum die Eigenwerte $\lambda_j = \alpha_j/\beta_j$, weshalb eine hohe Orthogonalität der modalen Basis wünschenswert ist. Die Eigenwerte sind komplexwertig und enthalten im Realteil eine Information über die Dämpfung und im Imaginärteil des Eigenwerts die Resonanzfrequenz der zugehörigen Mode.

Die abgestrahlte Schalleistung kann schließlich aus den Eigenvektoren und der rechten Seite des Gleichungssystems modal superponiert werden [10]

$$\mathbf{P}(\omega) = \Re \left\{ -0.5i\omega\rho \sum_{m=1}^{2N-\delta} \frac{\mathbf{y}_{m\Gamma}^T \mathbf{f}_\Gamma(\omega)}{\alpha_m + ik(\omega)\beta_m} \mathbf{x}_{m\Gamma}^T \mathbf{f}_\Gamma^*(\omega) \right\} \quad (7)$$

Modell und Ergebnisse

Als Modell dient in dieser Arbeit eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 0.6$ m, $b = 0.4$ m umschlossen von Luft ($\rho_f = 1.3$ kg m⁻³, $c_f = 340$ m s⁻¹), siehe Abbildung 1.

Bei dieser Geometrie treten keine Innenraumresonanzen durch Kavitäten, sondern lediglich Schwingformen im

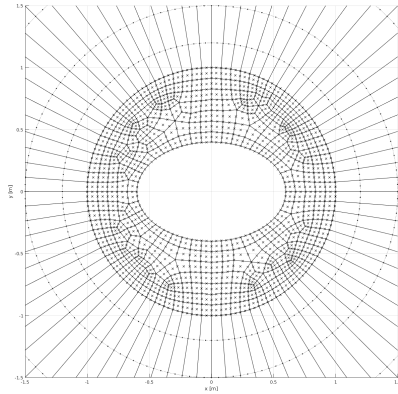


Abbildung 1: Ellipse und Netz im FE Gebiet sowie Ausschnitt des IFE Gebiets mit radialer Ordnung 17.

Außenraum auf. Das örtliche Schalldruckfeld und auch die Schalleistung ist in der unmittelbaren Nähe von Resonanzfrequenzen im Innenraum meist allein durch eine oder einige wenige Moden bestimmt. In den breiten Frequenzbereichen fernab der Resonanzen mit geringerer abgestrahlter Schalleistung ist die Lösung in der Regel durch deutlich mehr Moden bestimmt, was im Hinblick auf die Identifikation relevanter Moden näherer Untersuchungen bedarf.

Abbildung 2 zeigt beispielhaft die 25 ersten Rechtseigenvektoren (Moden), sortiert nach betragsmäßig aufsteigendem Eigenwert. Die ersten 16 Eigenschwingungsformen sind gemäß Modal Assurance Criterion (MAC) übereinstimmend und deren Differenz zwischen Maximum und Minimum im FE Gebiet liegen in der Größenordnung 10^{-13} (im Vergleich dazu bewegen sich die Unterschiede zwischen Maximum und Minimum der verbleibenden Moden bis Nummer 25 in der Größenordnung 10^{-4}). Es liegt die Vermutung nahe, dass die Anzahl dieser ersten *spurious modes* mit der radialen Ordnung der infiniten Elemente einhergeht, es fehlen jedoch weitere Untersuchungen, um diesen Verdacht zu bestätigen.

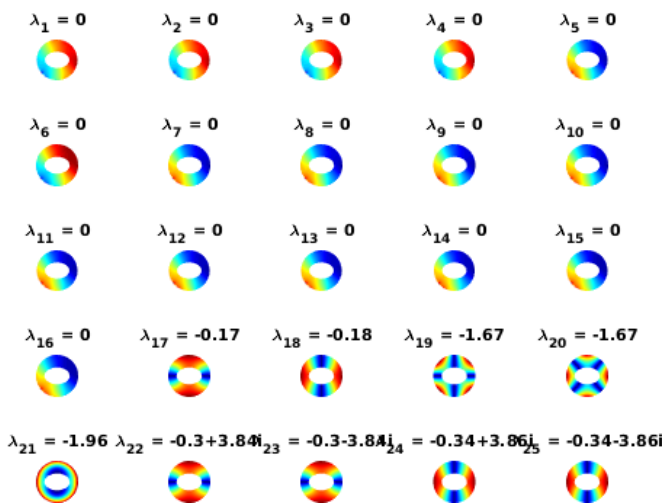


Abbildung 2: Die ersten 25 Rechtseigenvektoren (Moden), sortiert nach betragsmäßig aufsteigendem Eigenwert.

Die Berechnung der Schalleistung gemäß Gl. (7) infolge einer willkürlich gewählten, über den Ellipsenrand konstant verteilten Strukturschnelle $v_s = 1 \text{ ms}^{-1}$ offenbart, dass einzelne modale Beiträge das Gesamtergebnis der Überlagerung aller Moden verfälschen, siehe Abb. 3. Grundsätzlich kann—hier mit Ausnahme von 1 Hz—gezeigt werden, dass die Lösung der Schalleistung durch Vollinversion des Gleichungssystems Gl. (2) mit einer Referenzlösung durch COMSOL Multiphysics bestätigt werden kann. Die schwarze Linie mit runden Markern gibt die Lösung der Überlagerung der kompletten modalen Basis an und liegt deutlich zu hoch im Vergleich zum gewünschten Ergebnis, was auf die zu hohen modalen Beiträge (schwarz gepunktet) oberhalb der Referenzkurve zurückzuführen ist. Darüber hinaus sind

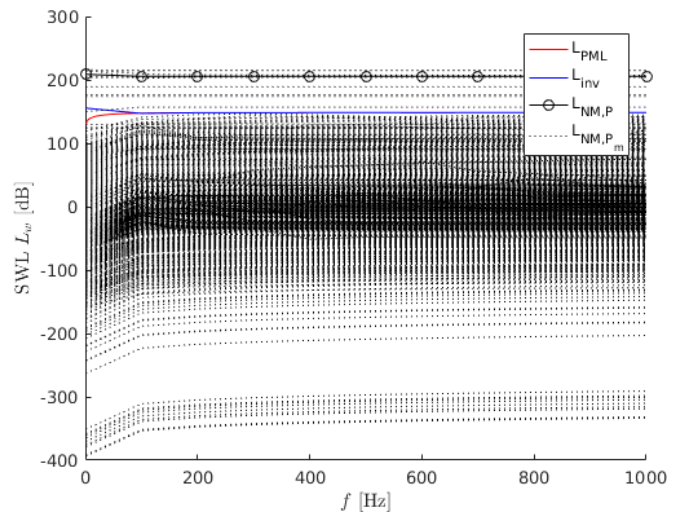


Abbildung 3: Schalleistungspegel: Referenzlösung (rot), Vollinversion (blau), Überlagerung aller *Normal Modes* (schwarz) und modale Beiträge (schwarz gepunktet).

unter den übrigen *Normal Modes* vermutlich nur einige wenige zur hinreichend genauen Bestimmung der abgestrahlten Schalleistung nötig. Es kann gezeigt werden, dass Ausreißer von der Orthogonalität in den Gleichungen (5) und (6) in der modalen Überlagerung voraussichtlich vernachlässigt werden können, diese jedoch nicht allein für das falsche Ergebnis der überlagerten Schalleistung verantwortlich sind, da viele der insgesamt 56 Ausreißer in den Matrizen von α und β mit eher geringen modalen Schalleistungen einhergehen. Dazu gehören auch 9 Moden mit dem Eigenwert Unendlich, die zu den unten abgeschlagenen, sehr niedrigen Schalleistungskurven gehören.

Ein weiterer Ansatz zur modalen Reduktion ist die Untersuchung des Ausdrucks $F_m = 1/(\alpha_m + ik\beta_m)$ in der Gleichung (7) der modalen Schalleistungen P_m . Dieser wird für sehr große Eigenwerte λ_m klein und sorgt für einen vernachlässigbaren Beitrag der abgestrahlten modalen Schalleistung. Eine große Wirkung haben jedoch Moden mit entweder einem kleinen λ_m oder einem kleinen β_m . Der Faktor F_m ist in Abb. 4 für alle Moden zur Frequenz 1 kHz aufgetragen. Die Frequenzabhängigkeit des Faktors ist in dem gewählten Beispiel nahezu vernachlässigbar, spielt jedoch bei Geometrien

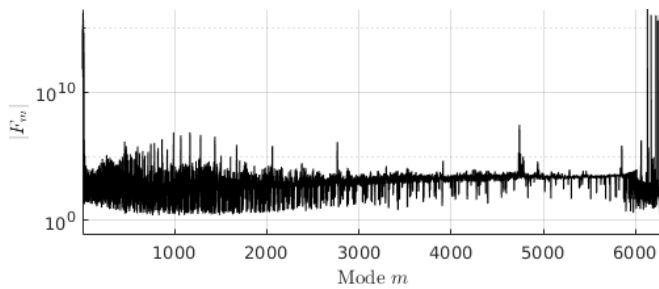


Abbildung 4: Faktor F_m über alle 6296 Moden m bei 1 kHz.

mit Kavitäten und schmalbandigen Innenraumresonanzen eine entscheidende Rolle. Sowohl unter den ersten Moden, als auch unter den letzten Moden treten einzeln sehr große Werte im Bereich 10^{15} für F_m auf. Es wird vermutet, dass diese sehr hohen Anteile für die überhöhte superponierte Schalleistung verantwortlich sind, jedoch—nach Vernachlässigung dieser Anteile—die nächstgrößeren Werte für F_m essentiell für ein hinreichend genaues Ergebnis der modalen Superposition sind. Alle weiteren Anteile mit einem sehr kleinen Wert für F_m dürften gemäß Gleichung (7) nicht entscheidend zur abgestrahlten Schalleistung beitragen. Die Vernachlässigung der stark überhöhten F_m führt tatsächlich zu einem besseren Ergebnis der modal superponierten Schalleistung, wenngleich die Abweichung noch immer nicht akzeptabel ist, sodass weitere Kriterien zur Vernachlässigung irrelevanter oder störender Moden gefunden werden müssen.

Zusammenfassung

Der akustische Außenraum kann auf Basis der Finite Elemente Methode und der Infinite Elemente Methode numerisch berechnet werden. Die Lösung des linearen Gleichungssystems liefert die örtliche Drucklösung im Außenraum und die abgestrahlte Schalleistung. Beide können im Vergleich zu einer kommerziellen Referenzlösung hinreichend genau bestimmt werden. Es wird ein Eigenwertproblem des diskreten Gleichungssystems mit den gewonnenen Systemmatrizen im Zustandsraum gelöst und die sogenannten *Normal Modes* ermittelt. Schalldruck und -leistung können als Summe der modalen Beiträge bestimmt werden. In dieser Arbeit wurden zwei Kriterien zur Identifikation nicht-relevanter Moden vorgestellt, die bei der modalen Superposition vernachlässigt werden können oder sollten, da sie entweder keinen oder einen falschen Beitrag zur Gesamtlösung liefern. Das erste Kriterium fordert eine hohe Orthogonalität der Eigenvektoren, das zweite Kriterium bewertet den Einfluss eines Faktors, der direkt proportional in die modale Berechnung des Schalldrucks und der -leistung eingeht. Die Identifikation relevanter und störender Moden bedarf noch weiterer Forschung, da offensichtlich beide mit großen Werten dieses Faktors einhergehen.

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung.

Literatur

- [1] Steven H Schot. Eighty years of sommerfeld's radiation condition. *Historia Mathematica*, 19(4):385 – 401, 1992.
- [2] Steffen Marburg and Bodo Nolte. A unified approach to finite and boundary element discretization in linear time-harmonic acoustics. In Steffen Marburg and Bodo Nolte, editors, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*, pages 1–34. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [3] R. J. Astley, G. J. Macaulay, Jean-Pierre Coyette, and Luc Cremers. Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. part i. formulation in the frequency domain. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(1):49–63, 1998.
- [4] R. J. Astley. Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(7):951–976, 2000.
- [5] R J Astley. Infinite elements. In Steffen Marburg and Bodo Nolte, editors, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*, pages 197–230. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] Daniel Dreyer and Otto von Estorff. Improved conditioning of infinite elements for exterior acoustics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(6):933–953, 2003.
- [7] Otto von Estorff, Steffen Petersen, and Daniel Dreyer. Efficient infinite elements based on jacobi polynomials. In Steffen Marburg and Bodo Nolte, editors, *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*, pages 231–250. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [8] Lennart Moheit and Steffen Marburg. Infinite elements and their influence on normal and radiation modes in exterior acoustics. *Submitted to Journal of Computational Acoustics*, 2016.
- [9] Françoise Tisseur and Karl Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM review*, 43(2):235–286, 2001.
- [10] Steffen Marburg, Frank Dienerowitz, Thomas Horst, and Stefan Schneider. Normal modes in external acoustics. part ii: Eigenvalues and eigenvectors in 2d. *Acta Acustica united with Acustica*, 92(1):97–111, 2006.
- [11] Steffen Marburg. Normal modes in external acoustics. part iii: Sound power evaluation based on superposition of frequency-independent modes. *Acta Acustica united with Acustica*, 92(2):296–311, 2006.