

Herleitung von Modellgesetzen schwingender Strukturen mittels Sensitivitätsanalyse am Beispiel einer gelenkig gelagerten Rechteckplatte

Christian Adams, Joachim Bös, Tobias Melz

TU Darmstadt, Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adaption und Maschinenakustik SAM, 64289 Darmstadt

E-Mail: adams@sam.tu-darmstadt.de.de

Einleitung

Im Rahmen der akustischen Produktentwicklung werden zunehmend Prognosemethoden benötigt, mit denen bereits in den ersten Phasen des Produktentwicklungsprozesses der Einfluss von Parametern (z.B. Geometriegrößen) auf akustische Zielfunktionen (z.B. Schalleistung) abgeschätzt werden kann. Aktuell werden bei der rechnergestützten Produktentwicklung, wie beispielsweise Finite-Elemente (FE)-Berechnungen, meist mehrere Varianten eines Produktes modelliert und die Auswirkung von Parameteränderungen auf eine akustische Zielfunktion untersucht. Diese Vorgehensweise erfordert vor allem bei einer Vielzahl an Varianten mit komplexer Geometrie (z.B. Getriebe oder elektrische Maschinen) eine lange Berechnungsdauer, da für jede Variante eine Berechnung durchgeführt werden muss. Eine weitere Möglichkeit, um die Auswirkung von Parameteränderungen auf eine Zielfunktion zu untersuchen, bietet die Sensitivitätsanalyse. Allerdings lässt sich mittels Sensitivitäten nur ermitteln, wie stark ein Parameter relativ zu anderen Parametern die Zielfunktion beeinflusst. Die tatsächliche, d.h. die quantitative Auswirkung einer Parameteränderung auf die Zielfunktion kann allein auf Basis der Sensitivitäten nicht bestimmt werden.

Eine Möglichkeit zur quantitativen Bestimmung von Parameteränderungen auf eine Zielfunktion bieten Modellgesetze. Abbildung 1 zeigt schematisch, wie eine akustische Zielfunktion einer schwingenden Struktur mit Hilfe eines Modellgesetzes bestimmt werden kann. Ausgehend von einem Grundentwurf (hochgestellt (p) von engl.: parent), dessen Parameter $X_j^{(p)}$ und Zielfunktionen $Y_k^{(p)}$ bekannt sind, wird ein Folgentwurf (hochgestellt (r) von engl.: replica) mit den Parametern $X_j^{(r)}$ abgeleitet. Mit Hilfe des Modellgesetzes wird anschließend die akustische Zielfunktion $Y_k^{(r)}$ des Folgentwurfs berechnet.

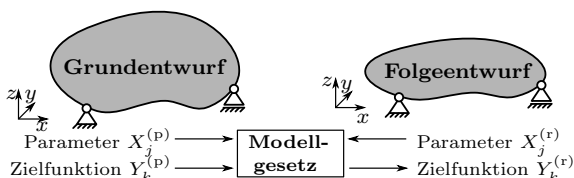


Abbildung 1: Prinzip der Anwendung von Modellgesetzen, nach [1]

Modellgesetze basieren auf der Ähnlichkeitstheorie, die in vielen Bereichen des Ingenieurwesens Anwendung findet [2]. In der Vibroakustik werden Modellgesetze heute meist für generische Strukturen mit bekannten Bewegungsgleichungen hergeleitet [3, 4]. Für komplexere Strukturen, die beispielsweise mittels FE modelliert werden, lassen sich mit der aus der Literatur bekannten Vorgehensweise keine Modellgesetze herleiten. Daher wird in diesem Beitrag eine Methodik zur Herleitung von Modellgesetzen gezeigt, für die die Bewegungsgleichung des Systems nicht erforderlich ist. Die Modellgesetze werden stattdessen auf Basis einer Sensitivitätsanalyse des betrachteten Systems ermittelt.

Zur Validierung dieses Ansatzes soll im ersten Schritt das Modellgesetz auf Basis der Sensitivitätsanalyse mit bekannten Modellgesetzen auf Basis der Ähnlichkeitstheorie verglichen werden. Dazu werden Modellgesetze einer gelenkig gelagerten Rechteckplatte betrachtet. Abbildung 2 zeigt die gelenkig gelagerte Rechteckplatte, die mit einer harmonischen Punktkraft $F^{(p)}$ in z -Richtung angeregt wird. Die Parameter des Grundentwurfs sind in Tabelle 1 aufgelistet.

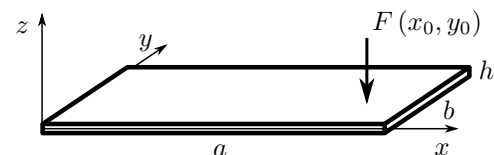


Abbildung 2: gelenkig gelagerte Rechteckplatte

Tabelle 1: Parameter des Grundentwurfs der gelenkig gelagerten Rechteckplatte

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
Länge	$a^{(p)}$	870	mm
Breite	$b^{(p)}$	620	mm
Dicke	$h^{(p)}$	5	mm
Position der Anregung in x	$x_0^{(p)}/a^{(p)}$	0.885	–
Position der Anregung in y	$y_0^{(p)}/b^{(p)}$	0.161	–
Amplitude der Anregung	$\hat{F}^{(p)}$	1	N
E-Modul	$E^{(p)}$	$2,04 \cdot 10^{11}$	N/m ²
Querkontraktionszahl	$\mu^{(p)}$	0,28	–
Dichte	$\rho^{(p)}$	7850	kg/m ³
Verlustfaktor	$\eta^{(p)}$	0,005	–

Sensitivitätsbasierte Modellgesetze

Zur Herleitung der sensitivitätsbasierten Modellgesetze dient der folgende allgemeine Produktansatz

$$Y_k^{(r)} = Y_k^{(p)} \prod_{j=1}^n \phi_j^{\alpha_{j,k}}. \quad (1)$$

Die gesuchte Zielfunktion $Y_k^{(r)}$ ergibt sich dabei aus der bekannten Zielfunktion $Y_k^{(p)}$ sowie dem Produkt der Maßstabsfaktoren

$$\phi_j = \frac{X_j^{(r)}}{X_j^{(p)}}. \quad (2)$$

Die Exponenten der Maßstabsfaktoren $\alpha_{j,k}$ ergeben sich nach [1] aus den Sensitivitäten erster Ordnung

$$\alpha_{j,k} = \frac{\partial \ln \left(\frac{Y_k^{(r)}}{Y_k^{(p)}} \right)}{\partial \ln (\phi_j)}. \quad (3)$$

In diesem Beitrag werden die Sensitivitäten mit einem zentralen Differenzenquotienten approximiert

$$\alpha_{j,k} \approx \frac{\ln \left(Y_k^{(+)} \right) - \ln \left(Y_k^{(-)} \right)}{\ln \left(\phi_j^{(+)} \right) - \ln \left(\phi_j^{(-)} \right)}. \quad (4)$$

Dabei bedeuten $Y_k^{(+)}$ und $Y_k^{(-)}$ die Zielfunktionen für den Fall, dass der Parameter j mit den Maßstabsfaktoren $\phi_j^{(+)}$ bzw. $\phi_j^{(-)}$ skaliert wird.

Sensitivitätsbasierte Modellgesetze der Rechteckplatte

Die sensitivitätsbasierten Modellgesetze der gelenkig gelagerten Rechteckplatte werden in diesem Beitrag für die Zielgrößen *Eigenfrequenzen* $Y_1 = f_{m,n}$ und *mittlere quadratische Übertragungsadmittanz*

$$Y_2 = Sh_T^2(f) = S \frac{\overline{v^2(f)}}{\overline{F^2(f)}} \quad (5)$$

berechnet. Dabei bedeuten $\overline{v^2(f)}$ die über die Plattenoberfläche gemittelte quadratische Schwinggeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Frequenz f , $\overline{F^2(f)}$ der quadrierte Effektivwert der Anregungskraft und $S = ab$ der Flächeninhalt der schwingenden Oberfläche.

Die Eigenfrequenzen und die mittlere quadratische Übertragungsadmittanz der Rechteckplatte können nach [5] wie folgt berechnet werden

$$f_{m,n} = \frac{\pi}{2} h \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\mu^2)}} \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right), \quad (6)$$

$$Sh_T^2(f) = \frac{f^2}{\pi^2 \rho^2 h^2 ab} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{m\pi x_0}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right)}{(f_{m,n}^2 - f^2)^2 + \eta^2 f_{m,n}^4}. \quad (7)$$

Dabei wird die Gültigkeit der KIRCHHOFF'SCHEN Plattentheorie vorausgesetzt. Für die Erläuterung der Symbole wird auf Tabelle 1 verwiesen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Frequenzabhängigkeit der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz in den nachfolgenden Gleichungen nicht explizit ausgeschrieben, jedoch implizit berücksichtigt. Die mittlere quadratische Übertragungsadmittanz der Rechteckplatte ist in Abbildung 3 über der Frequenz dargestellt. Die Schrittweite der Frequenz f wird in Abhängigkeit vom Verlustfaktor η gemäß [6] festgelegt. Dadurch ergibt sich eine geringe Frequenzschrittweite im Bereich der Eigenfrequenzen und eine größere Schrittweite zwischen den Eigenfrequenzen. Die Lage der ersten Eigenfrequenz $f_{1,1}$ ist beispielhaft in Abbildung 3 eingezeichnet.

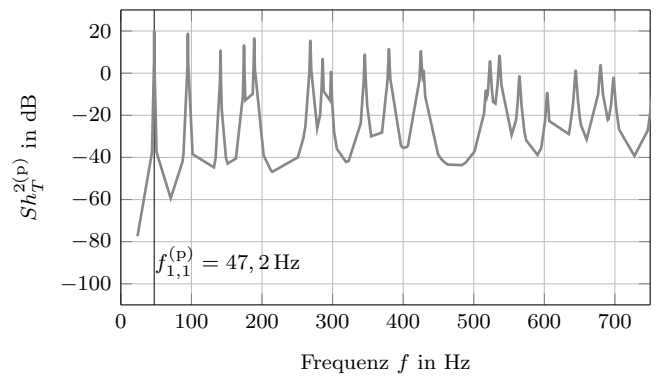


Abbildung 3: mittlere quadratische Übertragungsadmittanz des Grundentwurfs über der Frequenz (re $6.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 / (\text{Ns})^2$)

In diesem Beitrag werden Länge, Breite und Dicke der Rechteckplatte als Parameter in das Modellgesetz aufgenommen, wobei Länge und Breite stets mit demselben Maßstabfaktor ϕ_l skaliert werden. Folglich ergibt sich gemäß Gleichung (1) für das sensitivitätsbasierte Modellgesetz der Eigenfrequenzen

$$\frac{f_{m,n}^{(r)}}{f_{m,n}^{(p)}} = \phi_l^{\alpha_{l,f}} \phi_h^{\alpha_{h,f}} \quad (8)$$

und für das sensitivitätsbasierte Modellgesetz der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz

$$\frac{Sh_T^{2(r)}}{Sh_T^{2(p)}} = \phi_l^{\alpha_{l,Sh}} \phi_h^{\alpha_{h,Sh}}. \quad (9)$$

Ausgehend vom Grundentwurf der Rechteckplatte wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, bei der Länge und Breite gemeinsam sowie die Dicke der Rechteckplatte jeweils um $\pm 2\%$ variiert werden. Der Ort der Kraftanregung (x_0, y_0) bleibt konstant bezogen auf die Abmessungen der Rechteckplatte (siehe Tabelle 1). Aus

der Änderung der Eigenfrequenzen und der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz ergeben sich die Sensitivitäten und damit die Exponenten der sensitivitätsbasierten Modellgesetze gemäß Gleichung (4). Durch Einsetzen der Exponenten in die Gleichungen (8) und (9) folgt für das sensitivitätsbasierte Modellgesetz der Eigenfrequenzen

$$\frac{f_{m,n}^{(r)}}{f_{m,n}^{(p)}} = \phi_l^{-2} \phi_h^1 \quad (10)$$

und für das sensitivitätsbasierte Modellgesetz der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz

$$\frac{Sh_T^{2(r)}}{Sh_T^{2(p)}} = \phi_l^2 \phi_h^{-4}. \quad (11)$$

Die sensitivitätsbasierten Modellgesetze in den Gleichungen (10) und (11) stimmen mit den Modellgesetzen auf Basis der Ähnlichkeitstheorie überein, vgl. [3, 5].

Anwendung der sensitivitätsbasierten Modellgesetze

Im nächsten Schritt wird überprüft, wie gut die sensitivitätsbasierten Modellgesetze die Zielfunktionen beliebiger Folgeentwürfe approximieren. Dazu werden aus dem Grundentwurf der Rechteckplatte die Folgeentwürfe r1, r2 und r3 gemäß Tabelle 2 exemplarisch abgeleitet. Die Zielfunktionen dieser Folgeentwürfe werden zum einen direkt mit den Gleichungen (6) und (7) berechnet. Zum anderen werden die sensitivitätsbasierten Modellgesetze gemäß den Gleichungen (10) und (11) verwendet, um die Zielfunktionen der Folgeentwürfe aus den bekannten Zielfunktionen des Grundentwurfs zu ermitteln.

Tabelle 2: Maßstabsfaktoren der untersuchten Folgeentwürfe

r_i	$\phi_l^{(r_i)}$	$\phi_h^{(r_i)}$	$a^{(r_i)}$ in mm	$b^{(r_i)}$ in mm	$h^{(r_i)}$ in mm
r1	0,3	1,0	261,0	186,0	5,0
r2	1,0	3,0	870,0	620,0	15,0
r3	3,0	3,0	2610,0	1860,0	15,0

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4 bis 6 dargestellt. Es zeigt sich, dass die sensitivitätsbasierten Modellgesetze die berechneten Zielfunktionen sehr gut approximieren. Bei den Folgeentwürfen kommt es zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen, die durch das sensitivitätsbasierte Modellgesetz nach Gleichung (10) ausgedrückt werden kann. Beispielsweise ergibt sich durch Einsetzen der Maßstabsfaktoren des Folgeentwurfs r1 eine Frequenzverschiebung um den Faktor 11,11 zwischen Grundentwurf und Folgeentwurf r1. Die erste Eigenfrequenz des Folgeentwurfs ergibt sich demnach zu $f_{1,1}^{(r1)} = 11,11 \cdot f_{1,1}^{(p)} = 11,11 \cdot 47,2 \text{ Hz} = 524,8 \text{ Hz}$, was durch Vergleich der Abbildungen 3 und 4 bestätigt werden kann. Neben der Frequenz ändert sich bei den Folgeentwürfen auch der Pegel der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz. Durch Einsetzen der Maßstabsfaktoren in das sensitivitätsbasierte

Modellgesetz in Gleichung (11) kann die Auswirkung der Parameteränderung auf die mittlere quadratische Übertragungsadmittanz abgeschätzt werden. Beispielsweise ergibt sich durch Einsetzen der Maßstabsfaktoren für den Folgeentwurf r3 eine Änderung der mittleren quadratischen Übertragungsadmittanz um den Faktor 1/9, was einer Pegeländerung von $20 \lg(1/9) \text{ dB} = -19 \text{ dB}$ entspricht. Der Pegel bei der ersten Eigenfrequenz des Grundentwurfs beträgt ca. 20 dB, wohingegen der Pegel bei der ersten Eigenfrequenz des Folgeentwurfs r3 ca. 1 dB beträgt, wie den Abbildungen 3 und 6 entnommen werden kann.

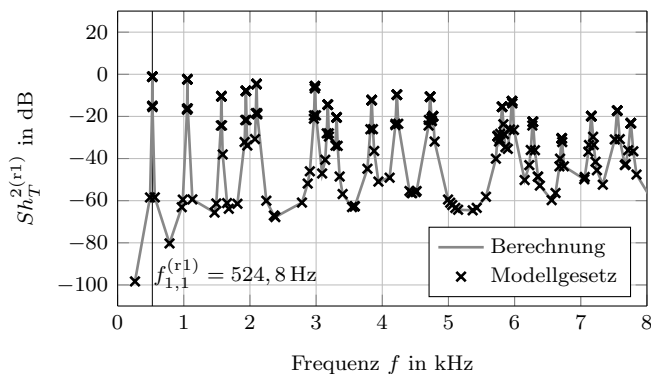


Abbildung 4: mittlere quadratische Übertragungsadmittanz des Folgeentwurfs r1 über der Frequenz ($re\ 6.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 / (\text{Ns})^2$)

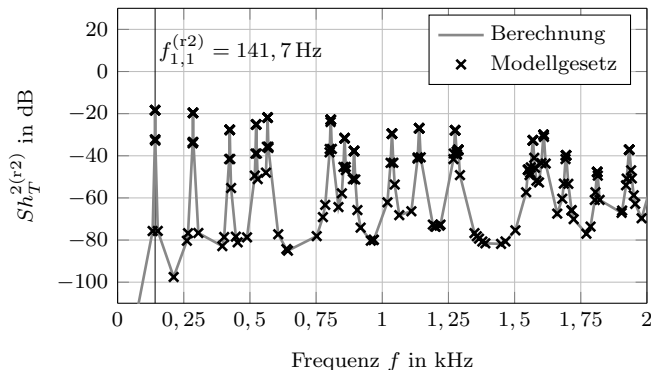


Abbildung 5: mittlere quadratische Übertragungsadmittanz des Folgeentwurfs r2 über der Frequenz ($re\ 6.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 / (\text{Ns})^2$)

Ein wesentlicher Grund für die sehr gute Übereinstimmung zwischen der direkten Berechnung und der Approximation durch die sensitivitätsbasierten Modellgesetze ist, dass der Kraftangriffspunkt relativ zu den Abmessungen der Rechteckplatte unverändert bleibt (siehe Tabelle 1). Dadurch sind die sich ausbildenden Betriebschwingformen von Grundentwurf und den Folgeentwürfen ähnlich.

Schlussfolgerung

Die in diesem Beitrag vorgestellte Methodik kann zur Herleitung von Modellgesetzen mittels Sensitivitätsanalyse verwendet werden. Über das Modellgesetz

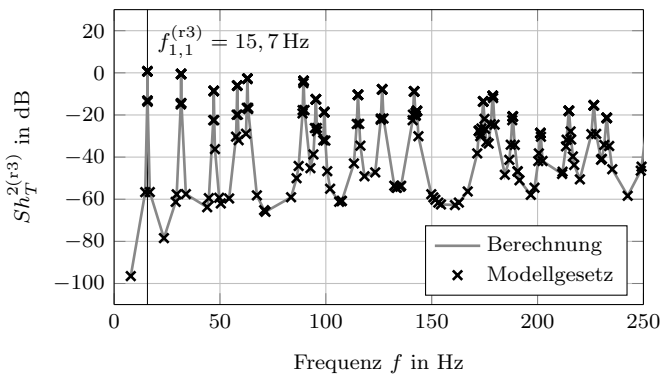


Abbildung 6: mittlere quadratische Übertragungsadmittanz des Folgeentwurfs $r3$ über der Frequenz (re $6.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 / (\text{Ns})^2$)

können Auswirkungen von Parameteränderung an einer schwingenden Struktur auf eine akustische Zielfunktion ermittelt werden. Der gewählte Modellansatz führt auf dieselben Modellgesetze wie die aus der Literatur bekannten Modellgesetze, die mittels Ähnlichkeitstheorie für eine gelenkig gelagerte Rechteckplatte hergeleitet werden. Im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise auf Basis der Ähnlichkeitstheorie bietet die Herleitung von Modellgesetzen mittels Sensitivitätsanalyse den Vorteil, dass keine analytischen Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems benötigt werden. Daher kann die Methodik beispielsweise auch im Rahmen von FE-Berechnungen eingesetzt werden, um Modellgesetze zu gewinnen. In zukünftigen Forschungsarbeiten wird die Herleitung von Modellgesetzen aus FE-Berechnungen näher untersucht. Dadurch lassen sich auch Modellgesetze für Strukturen mit komplexerer Geometrie gewinnen, für die keine analytischen Bewegungsgleichungen existieren. Weiterhin werden zukünftig weitere Parameter in die Modellgesetze aufgenommen, um beispielsweise auch die Auswirkung einer örtlichen Verschiebung der Anregungskraft beschreiben zu können. Mit Hilfe der Modellgesetze lässt sich im nächsten Schritt eine akustische Zielfunktion gezielt beeinflussen (*Design to Acoustics*), um beispielsweise die akustischen Eigenschaften eines Produkts zu verbessern.

Literatur

- [1] Adams, C., Bös, J., Slomski, E.M. und Melz, T.: On scaling laws obtained from a sensitivity analysis and applied to a vibrating rectangular plate. *Mechanical Systems and Signal Processing* (2017), in Begutachtung
- [2] Baker, W.E., Westine, P.S. und Dodge, F.T.: *Similarity methods in engineering dynamics: theory and practice of scale modeling*, 2. Auflage, Elsevier, Amsterdam, 1991
- [3] De Rosa, S., Franco, F. und Meruane, V.: Similarities for the structural response of flexural plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 230 (2015), 174–188

- [4] De Rosa, S., Franco, F. und Polito, T.: Structural similitudes for the dynamic response of plates and assemblies of plates. *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011), 969–980
- [5] Kollmann, F.G., Schösser, T.F., und Angert, R.: *Praktische Maschinenakustik*, Springer, Berlin, 2006
- [6] SAS Inc.: *ANSYS Documentation – Theory Reference – Release 15.0*, Canonsburg, 2013