

Anwendung von Cremers parallelen Platten auf leichte Bauelemente

Berndt Zeitler¹, Stefan Schoenwald², Christoph Höller³

¹ HFT Stuttgart, 70174 Stuttgart, Deutschland, Email: berndt.zeitler@hft-stuttgart.de

² Empa, CH-8600 Dübendorf, Schweiz, Email: stefan.schoenwald@empa.ch

³ NRC Canada, K1A 0R6 Ottawa, Kanada, Email: christoph.hoeller@nrc.ca

Einleitung

In diesem Beitrag wird das von Lothar Cremer vorgestellte Modell [1] zur Beschreibung der Wellenausbreitung in zwei unendlichen parallelen Platten mit einer elastischen Zwischenlage untersucht. In diesem Modell werden die Rotationsbewegung und die Schubverformung der Platten vernachlässigt, d. h. beide Platten unterstützen nur Biegewellen. Die obere der beiden Platten wird mit einer Punktkraft angeregt. Die Wellenzahl, die die Ausbreitung und Dämpfung der Biegewellen beschreibt, wird in verschiedenen Frequenzbereichen genauer betrachtet. Die nach Cremers theoretischem Modell berechneten Wellenzahlen werden mit den auf einer Holzbalkendecke experimentell ermittelten Wellenzahlen verglichen. Anschließend wird der Einfluss eines schwimmenden Estrichs, der im Modell durch die obere Platte dargestellt wird, auf berechnete und gemessene Wellenzahlen beschrieben.

Prüfaufbau und Material

Die in dieser Studie behandelte Leichtbaudecke (Abbildung 1, Fall 1) bestand aus 19 mm OSB, die mit der Längsachse senkrecht zu 305 mm tiefen Holz I-Trägern verlegt sind. Zusätzlich wurde ein 25 mm schwimmender Estrich auf einer 9 mm dicken Schaumstoff-Trittschalldämmung eingebaut (Abbildung 1, Fall 2). Um Körperschall-Messungen an der Unterseite des OSBs durchführen zu können wurde keine Abhangdecke angebracht.

Der Elastizitätsmodul (E-Modul) des OSBs wurde in einer früheren Studie mit $2.7 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ entlang der Querachse und mit $6.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ entlang der Längsachse bestimmt. Der E-Modul des Anhydridestrichs wurde mit $14 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ der Literatur entnommen. Obwohl der E-Modul der beiden Materialien sehr unterschiedlich ist, ist der frequenzunabhängige Parameter $a = m''/B'$ der Wellenzahl $k = a\omega^2$ in der gleichen Größenordnung. m'' und B' sind die flächenbezogene Masse und die Biegesteifigkeit der Platten. Für das 19 mm OSB ist $a = 7.3 \times 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}$ parallel und $a = 3.2 \times 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}$ senkrecht zu den Trägern. Für den Estrich ist $a = 2.6 \times 10^{-3} \text{ s}^2/\text{m}$. Die flächenbezogenen Massen betragen für das OSB etwa 12 kg/m^2 und für den Estrich etwa 50 kg/m^2 .

Messung der Wellenzahl

Zur Bestimmung des Realteils der Wellenzahl wurde die Decke jeweils in einem Punkt mit einem Shaker angeregt und der Betrag und die Phasenbeziehung der Schnelle an den Messpunkten entlang der dargestellten Linien ge-

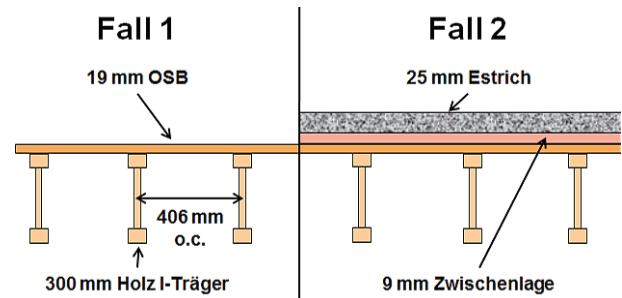


Abbildung 1: Skizze der beiden Fälle. Fall 1: 19 mm OSB auf 305 mm Holz I-Trägern. Fall 2: Wie Fall 1, aber mit schwimmendem Estrich aus 25 mm Anhydrit auf 9 mm Trittschalldämmung. Skizzen sind nicht maßstabsgetreu.

messen (Abbildung 2). Aus der Steigung der örtlich abgewinkelten Phase der Schnelle ergibt sich die Wellenzahl. Eine genauere Beschreibung der Draw-away Messmethode kann in [2] nachgelesen werden. Da die Messpunkte entlang der Draw-away Linien einen endlichen Abstand von $\Delta r = 0.1 \text{ m}$ haben, treten Aliaseffekte bei Wellenlängen kleiner als $\lambda_{Alias} = 2\Delta r$ oder $k_{Alias} = 2\pi/\lambda_{Alias} = 10\pi$ auf.

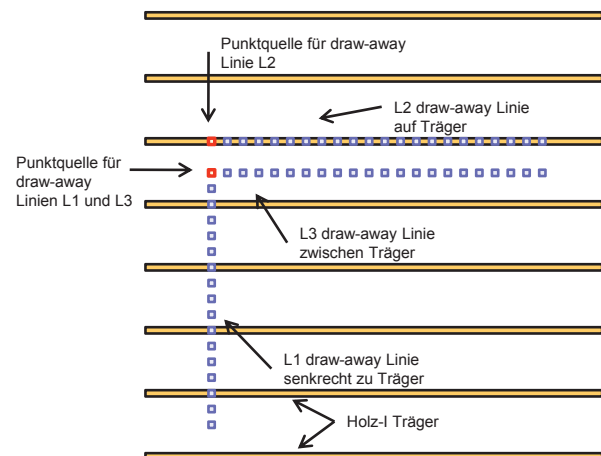


Abbildung 2: Anordnung der Anrege- und Aufnehmerpositionen zur Bestimmung des Realteils der Wellenzahl durch Draw-away Messungen. Linie L_1 ist senkrecht zu den Trägern, L_2 ist auf den Trägern, und L_3 ist parallel zu den Trägern.

Rohdecke – Freie Platte

Die Untersuchung der freien Platte ist wie folgt gegliedert: Ergebnisse der Draw-away Messungen, Theorie einer freien unendlichen Platte, und Vergleich zwischen Messung und Prognose.

Messung: Wellenzahl auf OSB

Aus den gemessenen Wellenzahlen in Abbildung 3 können folgende Schlüsse gezogen werden. Erstens ist die Aliasinggrenze von $k_{Alias} = 10\pi$ dargestellt, oberhalb der die Ergebnisse unzuverlässig werden (bei ca. 1-2 kHz). Das Übersprechen der Wellenzahlen im höheren Frequenzbereich zu tiefen Frequenzen wird hier vernachlässigt. Zweitens ist zu sehen, dass oberhalb von 500 Hz das OSB parallel zu den Trägern die geringste Steifigkeit hat (höchste Wellenzahl). Senkrecht zu den Trägern ist das OSB steifer, und am steifsten ist es entlang der Träger. Dies ist abhängig von der vorher beschriebenen frequenzunabhängigen Größe a der Wellenzahl. Drittens ist zu sehen, dass bei tiefen Frequenzen die Wellenzahl parallel zu den Trägern den Werten auf dem Träger folgt. In einer Studie von Mayr [3] wurde gezeigt, dass die Träger das OSB bis zu einer Entfernung von $\lambda/4$ versteifen, woraus die auch in der Abbildung dargestellte $\lambda/4$ -Grenze von $\lambda_{Grenze} = 406 \text{ mm}/2$ bzw. $k_{Grenze} = 2\pi/\lambda_{Grenze} = 7.7/\text{m}$ resultiert. Viertens ist ersichtlich, dass die Messung der Wellenzahl auf der Ober- und der Unterseite des OSBs sehr gut übereinstimmen. Für die späteren Messungen mit schwimmenden Estrich können somit die Wellenzahlen auf der Unterseite verwendet werden.

Theorie: Bewegung unendlicher Platten

Die von Cremer [1] hergeleitete Bewegungsgleichung einer unendlichen, homogenen, isotropen, dünnen Platte mit Punktanregung bei $r = 0$ wird hier als Modell A bezeichnet.

$$v(r, \omega) = \frac{F_0}{Z_{1\infty}} \Pi(k_A r) \quad (1)$$

$$\Pi(k_A r) = H_0^{(2)}(k_A r) - H_0^{(2)}(-jk_A r) \quad (2)$$

$H_0^{(2)}$ ist die Hankel-Funktion zweiter Art und Nullter Ordnung, $k_A = \frac{m''}{B'} \omega^2$ die Wellenzahl, m'' die flächenbezogene Masse, B' die Biegesteifigkeit und ω die Kreisfrequenz. Der erste Ausdruck in Gleichung 2 beschreibt die sich ausbreitenden Wellen und der zweite Ausdruck, ohne dessen eine Singularität bei $r = 0$ existieren würde, beschreibt das Nahfeld.

Prognose: Wellenzahl auf der Rohdecke

Die für Fall 1 gemessenen und berechneten Realteile der Wellenzahlen sind in Abbildung 3 dargestellt. Für Linie L_1 , senkrecht zu den Trägern, stimmt die Theorie der unendlichen Platte recht gut mit der Messung überein. Das gleiche gilt für Linie L_3 parallel zu den Trägern, jedoch nur im Frequenzbereich oberhalb der $\lambda/4$ -Grenze. Unterhalb dieser Grenze versteifen die Träger, die jedoch in der Berechnung nicht berücksichtigt sind, das OSB.

Rohdecke mit Estrich – Parallele Platten

Dieser Abschnitt ist wie zuvor in drei Teile gegliedert. Zusätzlich wird der Einfluss des schwimmenden Estrichs durch Modellierung mit Cremers Modell verdeutlicht.

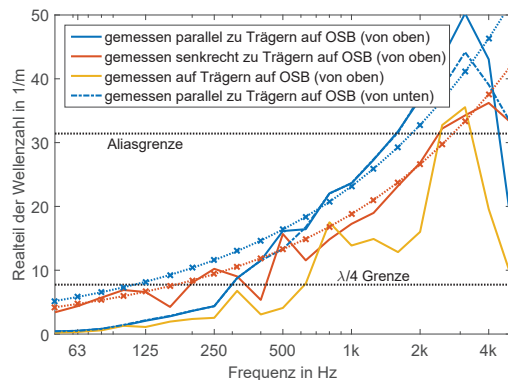


Abbildung 3: Messung des Realteils der Wellenzahl auf OSB senkrecht und parallel zu den Trägern. Die Theorie einer unendlichen, isotropen, dünnen Platte wird durch die gestrichelten x-Linien dargestellt (blau: parallel, rot: senkrecht).

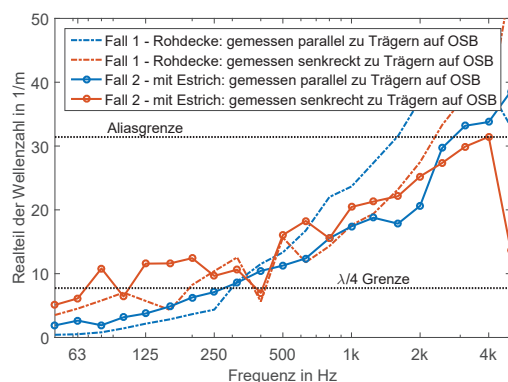


Abbildung 4: Änderung des Realteils der Wellenzahl auf dem OSB durch Einbau des schwimmenden Estrichs. Große Änderung parallel zu den Trägern (blaue Kurven), geringe Änderung senkrecht zu den Trägern (rote Kurven).

Messung: Wellenzahlen auf OSB und schwimmendem Estrich

Der Einfluss des schwimmenden Estrichs auf den Realteil der Wellenzahl des OSBs ist in Abbildung 4 dargestellt (durchgezogene vs. gestrichelte Linien). Senkrecht zu den Trägern (rote Kurven) hat der Estrich über den gesamten Frequenzbereich nur wenig Einfluss, parallel zu den Trägern (blaue Kurven) jedoch hat der Estrich bei höheren Frequenzen großen Einfluss. Dies lässt sich mit der nachfolgenden Theorie besser erklären.

Theorie: Bewegung paralleler Platten

Wie Cremer [1] zeigt, kann durch Kopplung der Wellengleichungen der einzelnen Platten die Lösung für das Platte-Feder-Platte System berechnet werden. Um die Gesamtlösung besser beschreiben zu können, werden Zwischenmodelle eingeführt (siehe Abbildung 5). Modell A beschreibt die einfache freie Platte wie im vorherigen Abschnitt; Modell B eine Platte die durch Federn an ein starres Fundament gekoppelt ist; und Modell C das vollständige Modell der zwei Platten mit elastischer Zwischenlage. Die Wellenzahlen und Schnellen in Modell C lassen sich aus einer Kombination der Modelle A und B beschreiben.

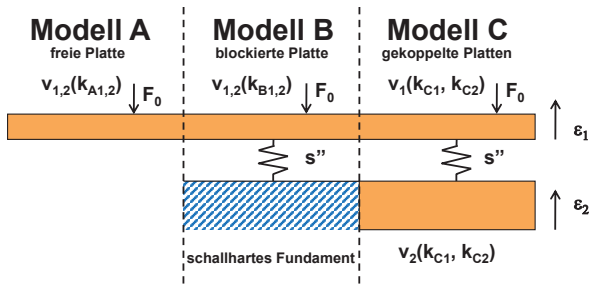


Abbildung 5: Modelle zur Beschreibung der Theorie von Cremers parallelen Platten. A: einfache Platte (frei), B: Platte auf elastischer Zwischenlage (blockierte Platte), C: parallele Platten mit elastischer Zwischenlage (gekoppelte Platten)

Die Annahmen der Eigenschaften der parallelen Platten in Modell C sind die gleichen wie für die freien Platten. Die aufgestellten Wellengleichungen der beiden Platten unterscheiden sich nur in der anregenden Kraft, die bei beiden abhängig von der relativen Auslenkung der beiden Platten ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) ist. Darum ist die Differentialgleichungen (DGL) als Funktion der Auslenkung ϵ und nicht der Schnelle v gegeben.

$$B'_1 \Delta \Delta \epsilon_1 - \omega^2 m''_1 \epsilon_1 = p - s''(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (3)$$

$$B'_2 \Delta \Delta \epsilon_2 - \omega^2 m''_2 \epsilon_2 = s''(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (4)$$

Das Lösen der DGL ist wieder im Wellenzahlbereich einfacher als im Ortsbereich. Nach Rücktransformation der vom Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω abhängigen Schnellen v_1 und v_2 ergibt sich:

$$v_1(r, \omega) = \frac{F_0}{Z_{1\infty}} [A_{11} \Pi(k_{C1} r) + A_{12} \Pi(k_{C2} r)] \quad (5)$$

$$v_2(r, \omega) = -\frac{F_0}{Z_{1\infty}} \frac{\omega_2^2}{\omega^2} [A_{21} \Pi(k_{C1} r) + A_{22} \Pi(k_{C2} r)] \quad (6)$$

$Z_{1\infty} = 8\sqrt{B'_1 m''_1}$ ist die Impedanz der unendlichen oberen Platte. Die Wellenzahlen k_{C1} und k_{C2} , beide in der oberen (schwimmender Estrich) und der unteren Platte (OSB) vorhanden, sind folgendermaßen beschrieben:

$$k_{C1,2}^4 = \frac{1}{2}(k_{B1}^4 + k_{B2}^4) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(k_{B1}^4 + k_{B2}^4)^2 + k_{A1}^4 k_{A2}^4 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega^4}} \quad (7)$$

Diese sind abhängig von den Wellenzahlen der freien Platte (Modell A: $k_{A1,2}^4 = \frac{m''_{1,2}}{B'_{1,2}} \omega^2$) und der blockierten Platte (Modell B: $k_{B1,2}^4 = k_{A1,2}^4 (1 - \frac{\omega_{1,2}^2}{\omega^2})$).

Die Punktanregung ist durch $p = F_0 \delta(x) \delta(y)$ beschrieben, die Resonanzfrequenzen durch $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{s''}{m''_{1,2}}}$, und die Koeffizienten A_{11} , A_{12} , A_{21} , und A_{22} sind folgendermaßen definiert:

$$A_{11} = \frac{k_{A1}^2 k_{C1}^4 - k_{B2}^4}{k_{C1}^2 k_{C1}^4 - k_{C2}^4}; \quad A_{12} = -\frac{k_{A1}^2 k_{C2}^4 - k_{B2}^4}{k_{C2}^2 k_{C1}^4 - k_{C2}^4}; \quad (8)$$

$$A_{21} = \frac{k_{A1}^2 k_{A2}^4}{k_{C1}^2 k_{C1}^4 - k_{C2}^4}; \quad A_{22} = -\frac{k_{A1}^2 k_{A2}^4}{k_{C2}^2 k_{C1}^4 - k_{C2}^4}; \quad (9)$$

Bei hohen Frequenzen $\omega \gg \omega_{1,2}$ sind die Wellenzahlen der drei Modelle gleich ($k_A \approx k_B \approx k_C$), was für die Schnellen folgendes bedeutet:

$$v_1(r, \omega) = \frac{F_0}{Z_{1\infty}} [A_{11} \Pi(k_{C1} r)] \quad (10)$$

$$v_2(r, \omega) = -\frac{F_0}{Z_{1\infty}} \frac{\omega_2^2}{\omega^2} [A_{21} \Pi(k_{A1} r) + A_{22} \Pi(k_{A2} r)]$$

Folglich ist bei hohen Frequenzen die obere Platte von der unteren entkoppelt und verhält sich wie eine freie Platte (siehe Gleichungen 10 und 1). Die untere Platte hängt von den Wellenzahlen der beiden freien Platten ab, jedoch dominiert die der steiferen Platte mit der kleineren Wellenzahl.

Bei tiefen Frequenzen bestimmen die Koeffizienten welche Wellenzahl größeren Einfluss hat. Für $A_{11} > A_{12}$ hat bei der oberen Platte die Wellenzahl k_{C1} stärkeren Einfluss als die Wellenzahl k_{C2} und andersherum. Für $A_{21} > A_{22}$ dominiert bei der unteren Platte die Wellenzahl k_{C1} gegenüber der Wellenzahl k_{C2} und andersherum.

Prognose: Wellenzahl auf der Rohdecke und dem schwimmenden Estrich

Ein Vergleich von Messungen und Theorie veranschaulicht die Ergebnisse. Als erstes wird die Änderung der Wellenzahl der OSB Platte durch den schwimmenden Estrich betrachtet. Wie zuvor gezeigt hat sich die Wellenzahl parallel zu den Trägern deutlich verändert. Der Estrich zwingt dem OSB seine Wellenbewegung auf. Für den parallelen Fall ist die Wellenzahl im OSB größer als im Estrich, weswegen A_{21} größer ist als A_{22} . Die Wellenzahl auf dem OSB wird folglich durch die Estrich-Eigenschaften bestimmt. Abbildung 6 zeigt, dass bei hohen Frequenzen die Wellenzahl auf dem OSB gleich der Wellenzahl des freien Estrichs ist. Das einfache Modell A (gestrichelte Linie) stimmt mit den Messungen in diesem Bereich sehr gut überein, die Wellenzahl wird bei tieferen Frequenzen jedoch etwas überschätzt. Es ist zu erwähnen, dass die Eigenschaften des Estrichs zur Berechnung der Wellenzahl auf dem OSB herangezogen wurden weil die steifer Welle dominiert.

Das volle Modell C (Kreise) führt zu noch höheren Abweichungen bei tiefen Frequenzen, weil die sehr viel größere Steifigkeit der Träger vernachlässigt wurde. Mit Modell B (Kreuze) wird durch die angenommene unendlich hohe Steifigkeit der Träger eine bessere Übereinstimmung im tiefen Frequenzbereich erzielt. Für den Fall senkrecht zu den Trägern (Abbildung 7) bei den tiefen Frequenzen versteifen diese das OSB nicht. Jedoch haben beide Wellenzahlen k_{C1} und k_{C2} Einfluss, weil die Steifigkeit des OSBs senkrecht zu den Trägern in der gleichen Größenordnung der des Estrichs ist. Die Messung stimmt deshalb mit den vollständigen Modellen für k_{C1} und k_{C2} im gesamten Frequenzbereich überein.

In Abbildungen 8 und 9 sind die Wellenzahlen auf dem schwimmenden Estrich parallel beziehungsweise senkrecht zu den Trägern dargestellt. Im Gegensatz zum OSB

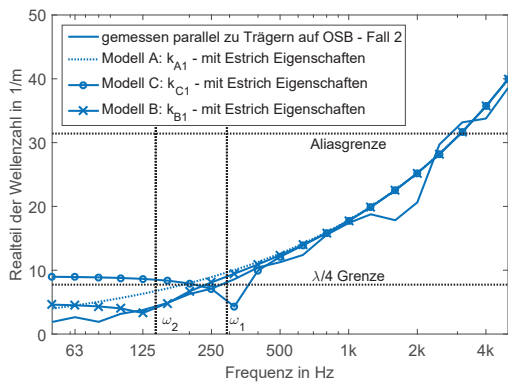


Abbildung 6: Messung und Rechnung des Realteils der Wellenzahl parallel zu den Trägern auf OSB (mit Estrich).

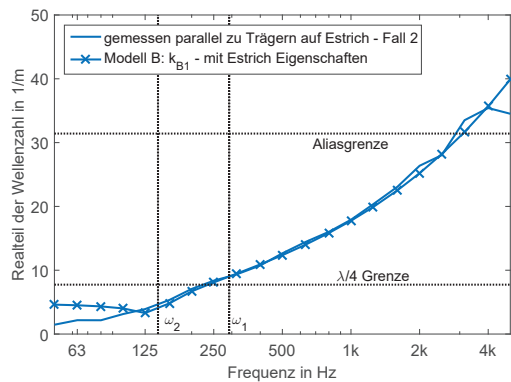


Abbildung 8: Messung und Rechnung des Realteils der Wellenzahl parallel zu den Trägern auf schwimmendem Estrich.

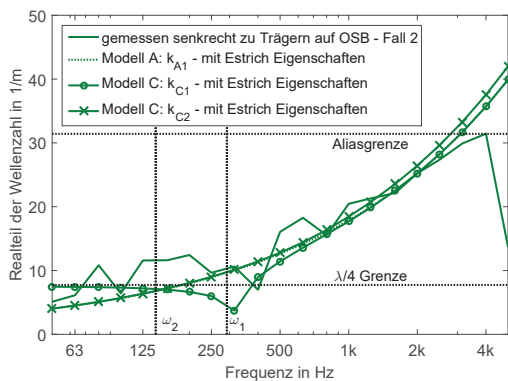


Abbildung 7: Messung und Rechnung des Realteils der Wellenzahl senkrecht zu den Trägern auf OSB (mit Estrich).

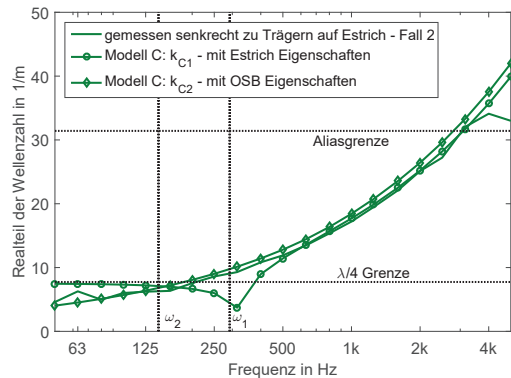


Abbildung 9: Messung und Rechnung des Realteils der Wellenzahl senkrecht zu den Trägern auf schwimmendem Estrich.

wird wegen des großen Unterschieds von A_{11} und A_{12} die Wellenzahl des schwimmenden Estrichs durch dessen eigene Materialeigenschaften bestimmt. Um die Steifigkeit der Träger in Betracht zu ziehen wurde für den parallelen Fall Modell B verwendet. Obwohl Modell B nur für die tiefen Frequenzen gültig ist, führt es über den gesamten Frequenzbereich zu guten Ergebnissen. Dies liegt daran, dass die $\lambda/4$ -Grenzfrequenz ab der die Träger keinen Einfluss haben und die Frequenz der Entkopplung der oberen Platte etwa gleich sind. Oberhalb dieser stimmen alle Modelle überein ($k_A \approx k_B \approx k_C$).

Senkrecht zu den Trägern ist die Wellenzahl auf dem Estrich abhängig von k_{C1} als auch k_{C2} . Da beide ähnlich sind, ist jedoch Modell A für eine Prognose ausreichend.

Zusammenfassung und Fazit

In diesem Beitrag wurde gezeigt, dass der theoretisch berechnete Realteil der Biegewellenzahl von zwei unendlichen, homogenen, isotropen Platten mit elastischer Zwischenlage gut mit der auf einer endlichen, inhomogenen, orthotropen Holzbalkendecke mit OSB Deckschicht und schwimmendem Estrich gemessenen Wellenzahl übereinstimmt. Die Wellenzahl wurde hierbei jeweils entlang dreier Achsen (entlang, zwischen und senkrecht zu den Trägern) untersucht. Die Resonanzfrequenzen ($\omega_{1,2}$) beschreiben die Entkopplung der oberen angelegten Platte von der unteren. Oberhalb dieser Frequenz

kann für die Estrichplatte als Vereinfachung des theoretischen Modells in den Richtungen parallel und senkrecht zu den Trägern das Modell A einer freien unendlichen Platte verwendet werden. Die Wellenausbreitung in der unteren OSB Platte ist jedoch abhängig von den Wellenzahlen der beiden freien Platten, wobei jeweils die steifere der beiden Platten dominiert. Im vorgestellten Beispiel zwingt also der Estrich dem biegeweicheren OSB seine Wellenzahl auf. Bei tiefen Frequenzen muss die Richtung der Wellenausbreitung im Estrich unterschieden werden. Parallel zu den Trägern versteifen diese unterhalb der $\lambda/4$ -Grenze das OSB. Dies ist jedoch im theoretischen Modell nicht berücksichtigt. Daher stimmt parallel zu den Trägern die Wellenzahl von Modell B der "Blockierten Plattenäm besten mit der gemessenen des Estrichs überein. Senkrecht zu den Trägern versteifen diese das OSB nicht, und so muss das vollständige Modell C angewandt werden.

Literatur

- [1] L. Cremer, M. Heckl: "Körperschall", Springer, 1995.
- [2] T.R.T Nightingale, R.E. Halliwell, G. Pernica: "Estimating in-situ material properties of a wood joist floor", Building Acoustics, 11(3), 175-196, 2004.
- [3] A. R. Mayr, T.R.T. Nightingale: "On the mobility of joist floors and periodic rib-stiffened plates", Proceedings of INTER-NOISE 2007, Istanbul, 2007.