Akustik und Schrödinger-Gleichung.

O. Bschorr,

Aeroakustik, Stuttgart

Zusammenfassung.

Die ganzzahligen Eigenfrequenzen der klassischen Akustik haben Schrödinger zu seiner allbekannten Gleichung angeregt. Darin spielt die Planck-Konstante h mit der SI-Dimension [$kgm^2/s \equiv Js \equiv Hm$] eine ausschlaggebende Rolle: Mit der Energie-Einheit $J \equiv kg(m/s)^2$ hatte sich die Deutung von h als Energiequantum Js und die außerhalb der klassischen Wellenmechanik liegende Wandlung eines Energiequantums Js in eine monochromatische Lichtstrahlung etabliert. Mit der Impulseinheit Huygens $H \equiv kg(m/s)$ lässt sich h nach Nicholson als Drehimpuls Hm interpretieren. Obwohl später für alle Elementarteilchen und alle Bahnen ein Spin (=Eigendrehimpuls) mit einer rationalen h-Stufung nachgewiesen wurde, konnte sich die Nicholson-Theorie nicht mehr durchsetzen.- Hier soll die ursprüngliche Schrödinger-Intention wieder aufgenommen werden.

Schrödinger-Gleichung.

In seiner berühmten Ersten Mitteilung vom Januar 1926, „*Quantisierung als Eigenwertproblem*“ ging es Schrödinger darum „*die übliche Quantisierungsvorschrift durch eine andere Forderung zu ersetzen, in der kein Wort mehr von ganzen Zahlen vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art, wie etwa die Ganzzahligkeit der Knotenzahl einer schwingenden Saite*“ [1; 2. S. 1]. Dazu führt er eine Feldgröße $\psi = \psi(r,\vartheta,\varphi)$ ein „*derart, dass Ψ als Produkt von eingriffigen Funktionen der einzelnen Koordinaten* r,ϑ,φ *erscheinen würde.*“ Diese, weitgehend heuristisch gefundene Gleichung lautet im Original [1; 2, S.2]:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{K^2}(E - \frac{e^2}{r})\Psi = 0 \qquad (0)$$

Darin sind m die Masse und e die Ladung eines Elektrons im cgs-Gauß-System. Ohne Begründung setzt Schrödinger „*aus dimensionellen Gründen die Konstante K = h/2π gleich dem Planck´schen Wirkungsquantum“;* Zur Auflösung von (0) werden *„nach dem sattsam bekannten Separationsansatz die ϑ,φ-abhängigen Kugelfunktionen* $P_{mn}(\vartheta,\varphi)$ *abgetrennt und es verbleibt die vom Radiusabstand r abhängige Funktion $\chi = \chi(r)$. (n = 0, 1, 2, 3…..)“.*

$$\chi'' + 2\chi'/r + [k^2 + 2/r_0 r - n(n+1)/r^2]\chi = 0 \qquad (1)$$

Darin ist r_0 der Radius des Umlaufelektrons im Wasserstoff-Atom und k die Wellenzahl. Die Lösung von (1) führt auf die bekannten Laguerre-Polynome. [2, Gl.18]. „*Schließlich ergeben sich aus Bedingung [2.Gl.15´] die Eigenwerte ℓ.*

$$1/kr_0 = \ell \qquad -E_\ell = 2\pi^2 me^4/h^2\ell^2 \qquad (2)(3)$$

Die zugehörige Bahnenergie E_ℓ gehorcht dem wohlbekannten Bohr'schen Energieniveau und entspricht den Balmer-Termen“. [2.S.11]. Schrödinger hat eigenmächtig die Bahnenergie E_ℓ als negativ angesetzt und bekommt deshalb einen exponentiellen Abfall nach $\chi(r \gg r_0) \sim \exp(-kr)$ und damit keine Fernwirkung. Bei umgekehrtem Vorzeichen dagegen besteht mit $\chi(r \gg r_0) \sim (\exp -ikr)/r$ eine Fernfeldemission. Am Ende seiner 3. Mitteilung [2. S. 137] kommt er nochmals auf die Balmer- und Lyman-Serie zurück, wieder ohne auf die übergeordnete Rydberg-Formel einzugehen. Bereits in seiner Zweiten Mitteilung - Februar 1926 – resignierte Schrödinger „*dass Ψ nicht wirklich zur Wirkungsfunktion einer bestimmten Bewegung steht*“ [2.S.17]. Später wurde die Born´sche Interpretation übernommen die Ψ^2 als Aufenthalts-Wahrscheinlichkeit deutet. Damit ist der von Schrödinger avisierte Anschluss an die klassische Wellenmechanik verloren gegangen. Hinzu kam, dass die Planck´sche Konstante h [$kgm^2/s \equiv Js$] als Energie mal Zeit, als Energiequantum Js gedeutet wurde. Und man sah sich zur der Annahme gezwungen dass das scharfe, kohärente Rydberg´sche Linienspektrum einem außerhalb der klassischen Physik liegendem Quantensprung entstammt.

Strahlung des Wasserstoff-Atoms. (H-Atom).

Basis ist das auf Bohr/Sommerfeld zurückgehende, im SI-System beschriebene Modell des H-Atoms. Danach umkreist ein Elektron der Masse m [kg], der elektrischen Ladung -e [Cb] und Geschwindigkeit **v** [m/s] im Abstand **r** [m] den Atomkern. Das klassische Gleichgewicht von Fliehkraft und elektrostatischer Anziehung liefert im Grundzustand eine Kreisbahn mit dem auch von der Quantentheorie benützten Radius r_0, Geschwindigkeit v_0 und Umlauffrequenz f_0. Mit der Lichtgeschwindigkeit c [m/s] ist die der Frequenz f_0 zugeordnete Wellenlänge $\lambda_0 = c/f_0$. Über die Sommerfeld-Konstante α (8) erhält man das für die Abstrahlung η [-] (19) maßgebende Verhältnis $r_o/\lambda_0 = r_0 f_0/c = 1/860$.

$$r_0 = h/2\pi m\alpha c \quad [m] \qquad v_0 = \alpha c \quad [m/s] \qquad (4)(5)$$
$$f_0 = m(\alpha c)^2/h \quad [Hz] \qquad \lambda_0 = c/f_0 = h/\alpha^2 mc \quad [m] \qquad (6)(7)$$
$$\alpha = e^2/2\varepsilon_0 hc = 2\pi r_o/\lambda_0 = 1/137{,}04 \; [-] = \text{Sommerfeld-K.} \qquad (8)$$

Wasserstoff-Spektrum. Die Spektralfrequenzen f_{nm} [Hz] des Wasserstoff-Atoms beschreibt die experimentell gesicherte und hier ausreichende Rydberg-Formel:

$$f_{nm} = \frac{f_0}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad m > n = 1, 2, 3\ldots \qquad (9)$$

Nachfolgend ist der ()-Term tabellarisch dargestellt:

	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6 ….
$n = 1$	$(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2})$	$(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2})$	$(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2})$	$(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2})$	$(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{6^2})$ ….
$n = 2$		$(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})$	$(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2})$	$(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2})$	$(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2})$ .. ..
$n = 3$			$(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2})$	$(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2})$	$(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2})$ …

Historisch bedingt sind die Zeilen mit den Indizes n zu Serien zusammengefasst; wobei n=1 die Lyman-, n=2 die Balmer-, n=3 die Paschen-und n =4 die Brackett-Serie darstellt. Die Spaltenglieder m haben dieselbe Indexstruktur wie die Kugelfunktionen P_{mn}.

Nicholson-Theorie. Die von Bohr adaptierte Deutung des Planck´schen Wirkungsquantums h [$kgm^2/s \equiv Js$] als Energiequantum Js ist nicht zwingend. Mit der Impulseinheit Huygens H = mkg/s hat auch der Drehimpuls $\mathbf{P} = m\mathbf{v}x\mathbf{r}$ des Umlauf-Elektrons die Dimension [$kgm^2/s \equiv Hm$]. Nach dem 2. Kepler-Gesetz beschreibt das Vektorprodukt $\mathbf{v}x\mathbf{r} = \mathbf{A}°$ [m^2/s] die dem Umlauf-Elektron zugeordnete Flächengeschwindigkeit $A° = |\mathbf{A}°|$ [m^2/s] und ist eine Bahninvariante. Im Grundzustand des H-Atoms hat das Elektron nach (4,5) gerade den Drehimpuls $P_0 = mv_0r_0 = h/2\pi$ und die Flächengeschwindigkeit $A_0° = v_0r_0 = P_0/m$. Der Kreis ist ein Sonderfall, im Allgemeinen handelt es sich um elliptische Bahnen. Mit der großen(kleinen) Ellipsen-Achse a (b) [m] ist die Bahnfläche $A = \pi ab$ [m^2] und bei einer Umlauffrequenz f [Hz] ist der Drehimpuls P [Hm]

$$P = Afm = \pi abfm \qquad P := \ell h/2\pi \quad \ell = 1, 2, 3\ldots \quad (11)(12)$$

Fakt ist, dass alle Elementarteilchen einen Drehimpuls (=Spin) besitzen, dieser hat bei Baryonen den Wert h und bei Leptonen – zu denen das Elektron zählt - genau h/2. Mit diesen Parallelen soll die alte, gegen Bohr unterlegene Nicholson-Theorie [4,5] als Ausgangsbasis dienen, danach nimmt der invariante Drehimpuls P nur ganzzahlige Werte $\ell = 1, 2, 3\ldots$ von P_0 an. (12).

Schrödinger Intention.

Das ursprüngliche Ziel von Schrödinger, die physikfremden Quantensprünge als Eigenfrequenzen zu deuten, soll hier wieder aufgenommen werden. Um einer Lösung näher zu kommen, werden dazu verschiedene Aspekte abgeklärt.

Rydberg-Bahnen. Über das 3. Kepler-Gesetz (13) mit dem Zusammenhang von großer Ellipsenachse a und Frequenz f [Hz] des umlaufenden Elektrons

$$a^3f^2 = r_0^3f_0^2 = const \quad (13)$$

und für $f \rightarrow f_{nm}$ die Rydberg-Frequenzen gesetzt, erhält man die zugeordneten Bahnachsen a_{nm} und b_{nm}

$$a_{nm} = r_0\,(f_0/f_{nm})^{2/3} \qquad b_{nm} = \ell(a_{nm}\,r_0)^{1/2} \quad (14)(15)$$
$$b_{nm}/a_{nm} \le 1 \quad \rightarrow \quad \ell^3(1/n^2 - 1/m^2)/2 \le 1 \quad (16)$$

Wegen $f_0/f_{nm} > 1$ kommt man in den Bereich der Rydberg-Atome mit $a_{nm} > r_0$. Die Ellipsenbedingung $b_{nm}/a_{nm} \le 1$ ist für $\ell = 1$ erfüllt, nicht aber für $\ell > 1$.

Bahnkollaps. Im Grundzustand hat das Kepler-Elektron die Bahnenergie E_0 [3] und emittiert die Lichtstrahlung N_- [7]

$$N_- = \omega_0^4e^2r_0^2/6\pi\varepsilon c^3 \;\; [W] \qquad E_0 = m(\omega_0r_0)^2 \;\; [Ws] \quad (17)(18)$$
$$\eta_0 = N_-/\omega_0E_0 = \alpha^3/6\pi \;\; [-] \qquad \omega_0 = 2\pi f_0 \;\; [rad/s] \quad (19)(20)$$

Der kleine Abstrahlgrad $\eta_0 = 2{,}1*10^{-8}$ geht letztlich auf die Fehlanpassung $r_0 << \lambda_0$ (8) zurück. Trotzdem droht rechnerisch ein Bahnkollaps. Zu dieser Zeit war noch nicht bekannt, dass bei einer Kollision mit Elektroneneinfang ein Neutron entsteht, das mit einer Halbwertszeit von 12 Min. wieder in Proton und Elektron zerfällt und man sah sich gezwungen emissionsfreie Quantenbahnen einzuführen.

Strahlungsbilanz. Für eine Strahlungsbilanz wird die Kepler-Bahn als zirkular polarisierter Schwinger aufgefasst. Dem Emissionsverlust N_- steht nach dem Kirchhoff´schen Strahlungsgesetz bei einer umgebenden spektralen Intensität J [W/m^2 Hz] ein Absorptionsgewinn N_+ [W] gegenüber. Der 1947 entdeckte Lamb-Shift kann als ein derartiger Energie-Austausch gedeutet werden.

$$N_+ = JS\Delta f \approx JS\eta f \qquad J \approx \lambda^{-2}\,k_BT \quad (21)(22)$$

Das Umgebungsfeld J ist durch die Planck´sche Strahlungsformel gegeben, aber für eine grobe Orientierung wird hier die Rayleigh-Jeans´sche Näherung (22) herangezogen. (k_B = Boltzmann-Konstante; T = Temperatur). Die wirksame Absorptionsfläche S [m^2] ist jedoch durch die Wellenlänge λ [m] begrenzt nach $S< \lambda^2$ und liefert bei Annahme einer effektiven Absorptionsbreite $\Delta f \approx \eta f$ [Hz] das Kriterium.

$$S/\lambda^2 \approx E/\,kT < 1 \quad (23)$$

Bei den in der Plasmaphase gegebenen Temperaturen mag diese Bedingung erfüllt sein, nicht aber bei einer Weltraumtemperatur von 2,7°K.

Resonanzschwinger. Das H-Atom kann im Bereich der Rydberg-Frequenzen $f_{nm} << f_o$ als eine elektrostatische Anordnung mit der zentralen Protonenladung +e und der über einen Ring mit Radius r_0 verteilten Elektronenladung –e aufgefasst werden. Ein solches Aggregat besitzt eine nichtstarre Gleichgewichtslage mit einem Eigenton-Netz aus Resonanzen und aus Antiresonanzen. Wegen der Fehlanpassung $r_0 << \lambda_0, \lambda_{nm}$ haben diese einen geringen Abstrahlgrad $\eta_{nm} << \eta_0$. Bei einem thermischen Stoß von 2 Atomen werden die internen Gleichgewichte gestört und Stoßenergie wird über die Resonanzfrequenzen f_{nm} emittiert: je kleiner η_{nm} ist, desto höher sind Güte und Kohärenz.

Quantenspringerei. Die Aufklärung der von der Kernphysik noch nicht verstandenen h-Stufung von Eigenspin und Bahnspin kann auch einen Hinweis zur Bahnstabilität liefern. Eine solche Erwartung ist weniger voreilig als die nicht nur von Schrödinger beklagte „*Quantenspringerei*".

Quellen.

[1] E. Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem. Annalen der Physik. (1926) Bd. 79. S.361 – 376.

[2] E. Schrödinger; Abhandlungen zur Wellenmechanik. J. A. Barth-Verlag, Leipzig. (1927)

[3] P. Sagirow: Satellitendynamik. Bibliograph. Institut, Mannheim. Hochschulskripten (1970) 719/719a.

[4] J. W. Nicholson: A Structural Theory of the Chemical Elements. Phil. Magazine Series 6.22 (1911).

[5] J. W. Nicholson: Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society. 2 (1956) S. 209 – 214.

[6] P. Matossi: Bemerkungen zur Analogie der Schrödinger schen Differentialgleichung mit einer Wellengleichung. Physikal. Zeitschrift (41) Heft 2. S. 47 – 52. (1940).