

# Untersuchungen zur Dämpfung durch Schallabstrahlung durch gekoppelte Akustik-Struktur-Simulationen

Suhaib K. Baydoun<sup>1</sup>, Steffen Marburg<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, TU München, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching bei München, Germany

## Einleitung

Dämpfung durch Schallabstrahlung bezeichnet die Dissipation kinetischer Energie vibrierender Strukturen in das akustische Fernfeld. Bei vielen technischen Anwendungen ist ihr Ausmaß relativ klein und daher vernachlässigbar. Allerdings kommt ihr Einfluss dann zum Tragen, wenn andere Dämpfungsmechanismen nur schwach ausgeprägt sind, wie zum Beispiel bei dünnwandigen Leichtbaustrukturen mit einem hohen Verhältnis von Steifigkeit zu Gewicht. Die Schallabstrahlung vibrierender Strukturen kann durch den Abstrahlgrad, einer Größe für die abgestrahlte Schalleistung bezogen auf die Schwinggeschwindigkeit, ausgedrückt werden [1]. Dämpfung durch Schallabstrahlung ist proportional zum Abstrahlgrad, welcher wiederum frequenzabhängig ist. Außer bei Platten gleichmäßiger Dicke und Dichte gibt es keinen analytischen Zugang dazu.

Erste semianalytische Methoden erlauben die Abschätzung der Dämpfung durch Schallabstrahlung von in der Grundfrequenz schwingenden Platten ohne Druckausgleich an den Rändern [2]. Später wurden diese Verfahren auf beliebige Schwingformen erweitert [3, 4].

Das Ausmaß der Dämpfung durch Schallabstrahlung wird unter anderem durch die kritische Frequenz bestimmt, an der die Biegenwellenzahl und die Wellenzahl des abgestrahlten Schalls im umgebenden Fluid übereinstimmen. Unterhalb der kritischen Frequenz ist die Dämpfung relativ schwach ausgeprägt und wächst bis zum Maximum im Bereich der kritischen Frequenz an. Daher ist die Dämpfung durch Schallabstrahlung besonders für Strukturen mit niedrigen kritischen Frequenzen relevant, wie zum Beispiel bei Sandwichplatten. Dies wurde unter anderem experimentell mittels Referenzmessungen in Vakuumkammern untersucht [5]. Auch die Auslegung von Musikinstrumenten wie zum Beispiel Glocken macht die Berücksichtigung von Dämpfung durch Schallabstrahlung erforderlich [6].

Die Dichte des Mediums, in das die Schallwellen abgestrahlt werden, spielt eine entscheidende Rolle. So ist beispielsweise die Dämpfung durch Schallabstrahlung von Unterwasseranwendungen nicht zu vernachlässigen. In dieser Arbeit wird eine in Wasser getauchte, punktkraftangeregte Hohlkugel aus Stahl mittels einer gekoppelten numerischen Formulierung untersucht. Das Ausmaß der Dämpfung wird durch das Verhältnis von abgestrahlter Schallenergie zur Gesamtenergie beschrieben und mittels des Verlustfaktors ausgedrückt.

## Gekoppelte numerische Formulierung für Struktur-Akustik-Interaktionen

Die Gleichungen der linearen, zeit-harmonischen Akustik und Elastodynamik werden mittels der Randelementemethode (BEM) [7] und der Finite Elemente Methode (FEM) [8] diskretisiert. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungssysteme.

$$(\mathbf{K}(1 - i\eta_h) - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{v}_s. \quad (2)$$

Die Spaltenmatrizen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{p}$  beinhalten die unbekanntenen Verschiebungs- und Schalldruckwerte an den Knoten.  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  bezeichnen die Steifigkeits- und Massenmatrix. Dämpfung kann mittels des hysteretischen Verlustfaktors  $\eta_h$  berücksichtigt werden. Die Struktur wird durch die Knotenkräfte  $\mathbf{f}$  angeregt.  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  sind die frequenzabhängigen Randelementematrizen, welche den Zusammenhang zwischen der Oberflächenschnelle der Struktur  $\mathbf{v}_s$  und dem Schalldruck liefern.  $\omega$  ist die Kreisfrequenz und  $i$  steht für die imaginäre Einheit. Die Gleichungen (1) und (2) sind auf der schallabstrahlenden Oberfläche gekoppelt. Dort gilt einerseits die Kontinuitätsbedingung und andererseits wirkt der Schalldruck als Normalspannung. Die Kopplungsbedingungen lauten

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{C}_{sf}\mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_s = -i\omega\mathbf{C}_{fs}\mathbf{u}. \quad (3)$$

Das globale Gleichungssystem unter Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen lässt sich nun schreiben als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}(1 - i\eta_h) - \omega^2\mathbf{M} & -\mathbf{C}_{sf} \\ -i\omega\mathbf{G}\mathbf{C}_{fs} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

wobei  $\mathbf{f}_s$  die äußeren Lasten an den Strukturknoten bezeichnet.  $\mathbf{C}_{sf}$  und  $\mathbf{C}_{fs}$  sind die Kopplungsmatrizen, welche die Beziehung zwischen den Druck- und Verschiebungsfreiheitsgraden liefern. Sie sind das Ergebnis einer Galerkinprojektion und werden wie folgt bestimmt.

$$\mathbf{C}_{sf} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n}_f \mathbf{N}_f d\Gamma, \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_{fs} = \Theta^{-1} \mathbf{C}_{sf}^T. \quad (6)$$

$\mathbf{N}_f$  und  $\mathbf{N}_s$  sind die Interpolationsfunktionen der Fluid- und Strukturknoten. Außerdem wurde der Normalenvektor der Fluidelemente  $\mathbf{n}_f$  auf dem Rand  $\Gamma$  eingeführt.  $\mathbf{n}_f$  zeigt in das Strukturgebiet hinein.  $\Theta$  ist die Randmassenmatrix und ist wie folgt definiert.

$$\Theta = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f d\Gamma. \quad (7)$$

Es werden diskontinuierliche Randelemente verwendet. Daher stimmen die Struktur- und Fluidknoten im Allgemeinen nicht überein. Außerdem ist es oftmals sinnvoll, unterschiedliche Netzgrößen zu verwenden. In dem Fall kann das Integral in (5) nicht mehr elementweise berechnet werden, da die Interpolationsfunktionen nicht kontinuierlich über die Elementgrenzen sind. Daher werden Mortarmethoden verwendet, wobei die Strukturelemente als Slave- und die Fluidelemente als Masterelemente definiert werden. Nach einer Simplexsuche nach überlappenden Elementen wird eine Hilfsebene basierend auf der Lage des Slaveelements definiert. Das Masterelement wird dann entlang der Normalenrichtung auf die Hilfsebene projiziert. Das entstehende Überschneidungsgebiet wird dann in Dreieckselemente unterteilt, über welche dann das Integral in (5) bestimmt wird. Das globale Gleichungssystem (4) wird iterativ mittels eines GMRES-Verfahrens gelöst.

Die abgestrahlte Schalleistung  $P$  kann in der linearen, zeit-harmonischen Akustik wie folgt bestimmt werden.

$$P = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_{\Gamma} p v_f^* d\Gamma \right\}, \quad (8)$$

wobei  $v_f$  die Schallschnelle bezeichnet und  $(\cdot)^*$  die komplexe Konjugierte angibt. Der Realteil  $\Re$  trägt zur Schallabstrahlung ins Fernfeld bei. Nach der Diskretisierung kann die Gleichung (8) als Postprocessingschritt ausgewertet werden, wobei sie unter Verwendung der Knotenwerte für den Schalldruck und der -schnelle sowie den Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_f$  wie folgt dargestellt werden kann.

$$P = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_{\Gamma} \mathbf{p}^T \Theta \mathbf{v}_f^* d\Gamma \right\}. \quad (9)$$

Die Dämpfung der Struktur aufgrund von Schallabstrahlung wird durch das Verhältnis von abgestrahlter Schalleistung zu der zur potentiellen Energie der Struktur  $E_p$  gehörigen Leistung bestimmt. Daraus ergibt sich der Verlustfaktor der Schallabstrahlung  $\eta_r$ .

$$\eta_r = \frac{P}{|-i\omega E_p|}, \quad (10)$$

wobei  $E_p$  aus den Verschiebungen der Struktur bestimmt werden kann.

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}^* - \frac{1}{2} \mathbf{f}_s^T \mathbf{u}. \quad (11)$$

Wird eine zusätzliche Dämpfung der Struktur berücksichtigt, so setzt sich der Gesamtverlustfaktor aus dem Verlustfaktor der Schallabstrahlung und dem Struktur-Verlustfaktor zusammen. Letzter ist wie folgt definiert.

$$\eta_s = \frac{1}{2} \omega \eta_h \frac{\Re \{ \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}^* \}}{|-i\omega E_p|}. \quad (12)$$

## Numerisches Beispiel: Dämpfung durch Schallabstrahlung einer punktkraftangeregten Hohlkugel

Die Dämpfung durch Schallabstrahlung einer Hohlkugel aus Stahl wird mittels der vorgestellten gekoppelten Formulierung bestimmt. Sie wird durch eine Punktkraft von

**Tabelle 1:** Materialeigenschaften von Stahl und Wasser und die geometrischen Größen der Hohlkugel.

Dichte von Stahl	$\rho_s$	7860 kg/m <sup>3</sup>
E-Modul	$E$	210 GPa
Querkontraktionszahl	$\nu$	0.3
Dichte von Wasser	$\rho_f$	1000 kg/m <sup>3</sup>
Schallgeschwindigkeit	$c$	1482 m/s
Radius der Hohlkugel	$r$	5 m
Wandstärke der Hohlkugel	$t$	0.05 m

$F = 1$  N harmonisch angeregt und strahlt Schall ins umgebende Wasser ab. Die geometrischen Größen der Hohlkugel und die Materialeigenschaften von Stahl und Wasser sind in der Tabelle 1 angegeben. Es wird keine zusätzliche Strukturdämpfung angenommen, sodass allein die Schallabstrahlung verantwortlich für die Energiedissipation ist. Zusätzliche Dämpfung könnte jedoch ohne Weiteres wie in (4) beschrieben berücksichtigt werden.

Zur Diskretisierung der Struktur werden auf der Reissner-Mindlin-Theorie basierende, achtknotige, schalenförmige finite Elemente verwendet. Die Vernetzung sowie die Assemblierung der Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  wird in ANSYS [9] durchgeführt. Für die Modellierung des akustischen Verhaltens des Wassers werden diskontinuierliche, viereckige Randelemente herangezogen. Diese superparametrischen Randelemente zeichnen sich durch eine vierknotige, bilineare, diskontinuierliche Schalldruckinterpolation und durch eine neunknotige biquadratische Approximation der Geometrie aus. Die Randelementematrizen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  werden in der nichtkommerziellen Software AKUSTA [10] berechnet und herausgeschrieben. Die Kopplung der beiden Netze wird unter Verwendung eines hauseigenen MATLAB-Programmes, wie im letzten Abschnitt erläutert, hergestellt [11, 12, 13]. In dieser Arbeit wurden insgesamt sechs unterschiedliche Netze verwendet, welche jeweils die selbe Anzahl von finiten und Randelementen aufweisen. Die Netzfeinheiten werden durch die Anzahl von Elementen auf einer Bogenlänge von  $\pi/2$  bestimmt. Die jeweiligen Anzahlen der Elemente sind in der Tabelle 2 aufgelistet. Obwohl die Anzahl der finiten und der Randelemente bei den untersuchten Netzen gleich sind, stimmen die Verschiebungs- und Schalldruckknoten aufgrund der diskontinuierlichen Schalldruckapproximation nicht überein. Daher ist die numerische Integration der Gleichung (5) notwendig um die Kopplungsmatrix zu berechnen.

Zur Überprüfung der Kopplung und der Verifizierung der Netze wurde der relative Fehler der abgestrahlten Schalleistung im Frequenzbereich bis 100 Hz mittels  $\epsilon_{\text{rel},P} = |P - P_{12}|/P_{12}$  bestimmt. Dabei entspricht  $P_{12}$  der Schalleistung des Netzes mit zwölf Elementen auf einer Bogenlänge von  $\pi/2$ . Im untersuchten Frequenzbereich sind keine Maßnahmen zur Unterbindung irregulärer Frequenzen notwendig, da die erste Eigenfrequenz des dazugehörigen Innenraumproblems mit Dirichlet-

**Tabelle 2:** Anzahl der finiten und Randelemente für Netze mit unterschiedlicher Anzahl an Elementen auf einer Bogenlänge von  $\pi/2$ .

Elemente auf $\pi/2$	Anzahl der Elemente
2	24
4	96
6	216
8	386
10	600
12	864

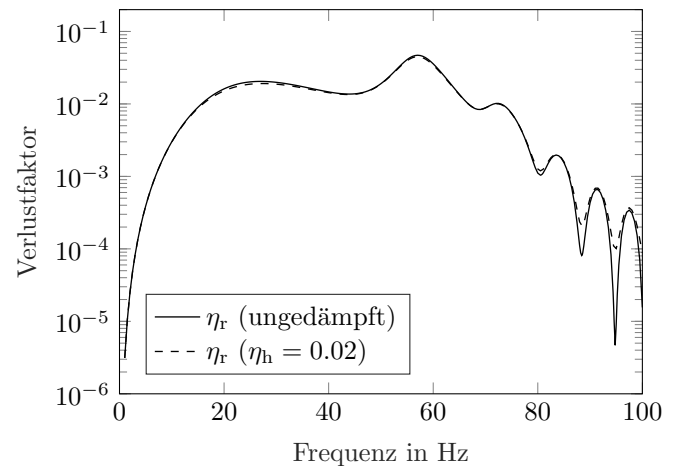
Randbedingungen bei 148 Hz liegt. Bei einer Frequenz von 100 Hz liefert das Netz mit 10 Elementen pro  $\pi/2$  einen Fehler von unter 0.5%. Daher wird das Referenznetz mit 12 Elementen als fein genug erachtet und für die folgenden Berechnungen verwendet.

Des Weiteren wurden die numerischen Verschiebungs- und Schalldrucklösungen des Referenznetzes mit den Lösungen analytischer Reihenentwicklungen [14] verglichen. Dazu wurden die Normalverschiebungen und die Schalldrücke auf der Kugeloberfläche an der Stelle  $\theta = \pi$  bezogen auf die Lasteinleitungsstelle an 208 ungleichmäßig verteilten Frequenzpunkten zwischen 0 und 100 Hz bestimmt. Die über die Frequenz gemittelten relativen Fehler betragen 1.0% für die Verschiebung und 3.8% für den Schalldruck und sind damit im akzeptablen Bereich.

Aus der Gleichung (10) kann der gesuchte Verlustfaktor berechnet werden, welcher das Ausmaß der Dämpfung durch Schallabstrahlung quantifiziert. Er ist in Abbildung 1 für den ungedämpften, als auch für den Fall mit einer zusätzlichen hysteretischen Dämpfung von  $\eta_h = 0.02$  dargestellt. Die Dämpfung durch Schallabstrahlung ist hochgradig frequenzabhängig und die größten Werte treten im Frequenzbereich zwischen 55-60 Hz auf, welcher der Quadrupol-Mode der Kugel zuzuordnen ist. Außerdem ist zu sehen, dass die zusätzliche Dämpfung bis auf an den Frequenzen von 88 und 94 Hz kaum einen Einfluss auf die Dämpfung durch Schallabstrahlung hat. Allerdings führt zusätzliche Strukturdämpfung dazu, dass der Gesamtverlustfaktor sich aus dem Verlustfaktor der Strukturdämpfung (12) und dem Verlustfaktor der Dämpfung durch Schallabstrahlung zusammensetzt. Aus einem Vergleich der beiden Verlustfaktoren lassen sich Rückschlüsse auf die Bedeutung der Dämpfung durch Schallabstrahlung für die betrachtete Struktur schließen. In dem betrachteten Beispiel übersteigt die Strukturdämpfung die Dämpfung durch Schallabstrahlung im gesamten Frequenzbereich, bis auf den Bereich von 55-60 Hz. Auf der anderen Seite sind genaue Werte für die Strukturdämpfung in vielen Fällen nicht ohne experimentelle Untersuchungen verfügbar.

## Zusammenfassung

Auf der Grundlage einer numerischen Formulierung für Struktur-Akustik-Interaktionen wurde ein Verfahren zur



**Abbildung 1:** Verlustfaktor der Schallabstrahlung der punktkraftangeregten Stahlhohlkugel in Wasser.

Bestimmung der Dämpfung durch Schallabstrahlung vorgestellt. Das Ausmaß der Dämpfung wird durch den Verlustfaktor ausgedrückt. Die Methode wurde auf das Beispiel einer punktkraftangeregten Hohlkugel aus Stahl in Wasser angewandt. Im betrachteten Frequenzbereich ist die Dämpfung durch Schallabstrahlung stark frequenzabhängig. Das Beispiel hat gezeigt, dass Dämpfung durch Schallabstrahlung dann besonders von Bedeutung ist, wenn andere Dämpfungsphänomene schwach ausgeprägt sind. Die vorgestellte Methode ist auf eine Vielzahl von struktur-akustischen Problemen anwendbar und ebnet den Weg zu einem besseren Verständnis von Dämpfung durch Schallabstrahlung und der Abschätzung ihrer Relevanz für zukünftige Forschung und Entwicklung.

## Danksagung

Diese Arbeit wurde vom DFG Schwerpunktprogramm 1897 „Calm, Smooth and Smart“ finanziell unterstützt und die Autoren drücken hiermit allen Beteiligten ihre Dankbarkeit aus.

## Literatur

- [1] F. Fahy and P. Gardonio. *Sound and Structural Vibration*. Academic Press, 2007.
- [2] R. A. Mangiarotty. Acoustic radiation damping of vibrating structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 35(3):369–377, 1963.
- [3] G. A. Kriegsmann and C. L. Scandrett. Assessment of a new radiation damping model for structural acoustic interactions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86(2):788–794, 1989.
- [4] C. E. Wallace. The acoustic radiation damping of the modes of a rectangular panel. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81(6):1787–1794, 1987.
- [5] B. L. Clarkson and K. T. Brown. Acoustic radiation damping. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107:357–360, 1985.

- [6] Y. Yu and B. M. Kwak. Design sensitivity analysis of acoustical damping and its application to design of musical bells. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44:421–430, 2011.
- [7] T. W. Wu (ed.). *Boundary element acoustics: Fundamentals and computer codes*. WIT Press, Southampton, 2000.
- [8] S. Marburg and B. Nolte (eds.). *Computational acoustics of noise propagation in fluids. Finite and boundary element methods*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [9] ANSYS. *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications. Release 13*. ANSYS Inc., Canonsburg, Pennsylvania, USA, 2010.
- [10] S. Marburg. Six boundary elements per wavelength. Is that enough? *Journal of Computational Acoustics*, 10:25–51, 2002.
- [11] H. Peters, S. Marburg and N. Kessissoglou. Structural-acoustic coupling on non-conforming meshes with quadratic shape functions. *Int J. Numer. Meth. Eng.*, 91(5):27–38, 2012.
- [12] H. Peters, N. Kessissoglou and S. Marburg. Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 133(5):2668–2677, 2013.
- [13] H. Peters, N. Kessissoglou and S. Marburg. Modal decomposition of exterior acoustic-structure interaction problems with model order reduction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 135(5):2706–2717, 2014.
- [14] M. C. Junger and D. Feit. *Sound, Structures, and Their Interaction*. MIT Press, Cambridge, 1986.